Devoir de Mathématiques numéro 3

Exercice 1

Soit p et q deux projecteurs de E. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q + q \circ p = 0$. Donner un exemple.

Exercice 2

Soit $f \in \mathscr{L}(E, E')$ et H un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E.

1) Montrer que l'application $\widetilde{f} : H \to f(E)$ définie par $\widetilde{f}(x) = f(x)$ est un isomorphisme (Indication : *on pourra commencer par montrer la linéarité, puis l'injectivité, et la surjectivité*).

2) On suppose désormais E et E' de dimensions finies respectives p et n. Trouver des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E et E' pour que la matrice de f dans ces bases soit la plus simple possible.

3) (Chapitre suivant) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r. Indication : *Utiliser les questions 1 et 2.*

a) Montrer que $M = PJ_rQ^{-1}$ avec P et Q des matrices inversibles et $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

b) Montrer que $M = P'I_rQ'$ avec $P' \in \mathscr{M}_{n,r}$ et $Q' \in \mathscr{M}_{r,n}$ deux matrices de rang maximal possible (que l'on précisera).

Exercice 3 (PT 2009, A extraits)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de E fixée. On considère l'application linéaire f ayant pour matrice, dans la base $\mathscr{B}$,

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est un projecteur. (Quel est son rang ?)

2) Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 4 (idem)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E fixée. Soit $\mathscr{D}$ la droite engendrée par $\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ et $\mathscr{P}$ le plan engendré par les vecteurs $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2$.

1) Montrer que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base.

2) Déterminer la matrice M, dans la base $\mathscr{B}$, du projecteur u sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$.

3) Donner la matrice M' de u dans $\mathscr{B}'$, la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, et la formule de changement de base.

Exercice 5

On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Indication : *Chercher une base adaptée, en prenant des vecteurs de l'image et du noyau.*

2) En déduire $\det(\alpha I_n + \beta J)$.