

Devoir de Mathématiques numéro 2

Correction

Exercice 1 (PT C 2015)

C'est la suite de l'exercice 1 du DS 2.

1) Soit φ définie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ pour $t \in [0, +\infty[$. Montrons que φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
La fonction φ est continue sur $[0, +\infty[$.
Étude en $+\infty$: $\varphi(t) \sim \dfrac{1}{t^2}$.
Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par équivalence φ est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Donc φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
Montrons que h est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car exponentielle l'est.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après ci-dessus et, comme $-xt^2 \leqslant 0$,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, +\infty[\qquad \left|\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

2) $h(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} = [\text{Arctan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ car $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \text{Arctan } X = \frac{\pi}{2}$.
Conclusion : $\boxed{h(0) = \dfrac{\pi}{2}}$

3) **a)** Soit a un réel strictement positif.
Soit φ définie par $\varphi(t) = \dfrac{t^2 e^{-at^2}}{1+t^2}$ pour $t \in [0, +\infty[$. Montrons que φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
La fonction φ est continue sur $[0, +\infty[$.
Étude en $+\infty$:
$t^2\varphi(t) \sim \dfrac{t^4 e^{-at^2}}{t^2} = t^2 e^{-at^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée ($a > 0$).
Donc $\varphi(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$. Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, donc φ aussi par comparaison.
Donc φ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
(Vous avez justifié que $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ était intégrable une fois, plus besoin de le répéter)

Montrons que h est dérivable sur $[a, +\infty[$. Soit $g(x,t) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$.

- $\forall t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$.
- $\forall x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (d'après 1)) ;
  la fonction $t \mapsto \dfrac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- Soit $\varphi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{t^2 e^{-at^2}}{1+t^2}$. La fonction φ est **intégrable sur** $[0,+\infty[$ d'après ci-dessus, et, comme $-xt^2 \leqslant -at^2$,

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2} \leqslant \frac{t^2 e^{-at^2}}{1+t^2} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$\boxed{h \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,+\infty[\text{ et } h'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

b) D'après 3)a), la fonction h est dérivable sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$; donc elle est dérivable sur

$$\bigcup_{a>0} [a,+\infty[=]0,+\infty[$$

Ainsi, $\boxed{h \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[}$

4) Soit $x>0$. Pour tout $t \in [0,+\infty[$, $t^2 \geqslant 0$, $1+t^2>0$ et $exp>0$, donc, par croissance de l'intégrale,

$$h'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

Donc h est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, puis, par continuité en 0, sur $\mathbb{R}_+$.
Finalement : $\boxed{h \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+}$
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par positivité de l'intégrale, $h(x) \geqslant 0$. Par décroissance de h, $h(x) \leqslant h(0) = \dfrac{\pi}{2}$ (question 2).
En conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad 0 \leqslant h(x) \leqslant \frac{\pi}{2}}$$

5) Soit $x>0$.

$$h'(x) - h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2 e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{(-t^2-1)e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t$$

Or en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x}t$ dans cette dernière intégrale (qui converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes), il vient :

$$\boxed{h'(x) - h(x) = -\frac{I}{\sqrt{x}}}$$

6) **a)** La solution générale de $y' - y = 0$ est

$$\boxed{y : x \mapsto Ce^x \quad \text{avec} \quad C \in R}$$

b) La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et x_0 est dans cet intervalle, donc elle admet une primitive s'annulant en x_0 qui s'écrit

$$\boxed{x \mapsto \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u}$$

c) On effectue une variation de la constante. Soit $C : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^1$. Posons $y(x) = C(x)e^x$.

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (\mathscr{E}) &\iff C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = -\frac{I}{\sqrt{x}} \\ &\iff C'(x) = -\frac{I}{\sqrt{x}}e^{-x} \\ &\iff C(x) = -I\int_{x_0}^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u + k \\ &\iff y(x) = \left(k - I\int_{x_0}^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\right)e^x \end{aligned}$$

Où k est une constante dépendant des conditions initiales.
Or h est une solution de $(\mathscr{E})$ d'après 5). Donc

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x > 0, \qquad h(x) = \left(k - I\int_{x_0}^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\right)e^x}$$

7) **a)** Soit $x > 0$. La fonction $f : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est continue sur $]0, x]$.

Étude en $u = 0$: $\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{u}}$, qui est intégrable en 0 (Riemann, $\alpha = 1/2 < 1$).
Donc, par équivalence, f l'est aussi.
Ainsi, $f : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur $]0, x]$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \text{ converge}}$
En effectuant le changement de variable $u = t^2$, où $t \mapsto t^2$ est une bijection strictement croissante sur $]0, x]$, le théorème de changement de variable nous donne

$$\boxed{\int_0^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-t^2}}{|t|}2t\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}$$

b) L'équation (1) est définie pour tout $x > 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_{x_0}^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ existe d'après 7)b).
On remarque aussi que k ne dépend pas de x (mais de x_0, par contre).
Les fonctions h et exp sont continues en 0.
Donc la limite existe et à la limite l'égalité (1) s'écrit :

$$\forall x > 0 \qquad h(0) = \left(k - I\int_{x_0}^0 \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\right)e^0$$

Or d'après 2) $h(0) = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\boxed{k = \frac{\pi}{2} + I\int_{x_0}^0 \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u}$$

En remplaçant dans (1) il vient, avec 7)a),

$$\boxed{\forall x \geqslant 0, \qquad h(x) = \left(\frac{\pi}{2} - 2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)e^x}$$

8) Au 4) nous avons obtenu l'encadrement $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. En remplaçant $h(x)$ par la valeur trouvée et en multipliant par e^{-x} il vient

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2} e^{-x}}$$

9) En passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, par encadrement, on trouve $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \right) = 0$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = I$, donc on a

$$\frac{\pi}{2} - 2I^2 = 0$$

Par conséquent $\boxed{I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Exercice 2 (E3A PSI 2015)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

- <u>Étude en $t = 1$</u> : On pose $t = 1 + h$. $(1+h)^2 - 1 = h^2 + 2h = h(h+2)$ donc

$$g(1+h) = \frac{1}{(1+h)^x\sqrt{(1+h)^2-1}} = \frac{1}{(1+h)^x\sqrt{h}\sqrt{h+2}} \sim \frac{1}{1^x\sqrt{h}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2h}}$$

  Or $h \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ est intégrable en 0 (Riemann, $\alpha = 1/2 < 1$), donc, par équivalence, la fonction g est intégrable en 0.

- <u>Étude au voisinage de $+\infty$</u> :

$$g(t) \sim \frac{1}{t^{x+1}}$$

  Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^{x+1}}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $x + 1 > 1$, c'est-à-dire $x > 0$ (Riemann, $\alpha = x + 1$). Donc, par équivalence, g est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $x > 0$.

Donc g est intégrable sur $]1, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$.
De plus g est positive, donc $|g| = g$: $f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$.
Conclusion : $\boxed{I = \mathbb{R}_+^*}$

2) <u>Existence</u> : $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Étude au voisinage de $+\infty$: $\dfrac{1}{e^x + e^{-x}} \sim \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.
Or $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ ($x \mapsto e^{-\beta x}$ avec $\beta = 1 > 0$).
Donc, par équivalence, $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ l'est aussi.
Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}}$ converge.
<u>Calcul</u> : Effectuons le changement de variable $u = e^x$, où $x \mapsto e^x$ est une bijection strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Donc le théorème de changement de variable s'écrit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}} = \int_1^{+\infty} \frac{1/u}{u + 1/u}\, \mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\, \mathrm{d}u = [\mathrm{Arctan}\ u]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{4}}$

3) La fonction φ est une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$.
Effectuons le changement de variable $t=\varphi(u)$ (donc $\mathrm{d}t = \operatorname{sh}(u)\,\mathrm{d}u$).
D'après le théorème de changement de variable, les deux intégrales sont de même nature, or d'après 1) l'une des deux converge, donc toutes les intégrales convergent.

$$f(1)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}(u)\,\mathrm{d}u}{\operatorname{ch}(u)\sqrt{\operatorname{sh}^2(u)}}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{ch}(u)}=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{e^u+e^{-u}}$$

Car $\operatorname{ch}^2-1=\operatorname{sh}^2$ et $\operatorname{sh}\geqslant 0$ sur $[0,+\infty[$. En conclusion, d'après 2),

$$\boxed{f(1)=\frac{\pi}{2}}$$

4) Comme nous l'indique l'énoncé,

$$\left(\frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}\right)'=\frac{\operatorname{ch}^2-\operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2}$$

De plus, avec le même changement de variable qu'à la question précédente,

$$f(2)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{t^2-1}}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{ch}^2(u)}=\left[\frac{\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)}\right]_0^{+\infty}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\operatorname{sh}(X)}{\operatorname{ch}(X)}$$

Or, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\operatorname{sh}(X)}{\operatorname{ch}(X)}=\dfrac{e^X-e^{-X}}{e^X+e^{-X}}\sim\dfrac{e^X}{e^X}=1$. Donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{\operatorname{sh}(X)}{\operatorname{ch}(X)}=1$, et

$$\boxed{f(2)=1}$$

5) Soit $x\in I$.

$$\forall t\in]1,+\infty[,\qquad \frac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}\geqslant 0$$

Donc, par positivité de l'intégrale, $\boxed{f \text{ est positive sur } I}$

6) Pour tout $t>1$, $\ln(t)>0$ donc $x\mapsto e^{-x\ln t}=\dfrac{1}{t^x}$ est décroissante.
(Exemple typique où on commence à chercher au brouillon, puis au propre on « renverse » la rédaction.)
Soit $(x,y)\in I^2$ tels que $x\leqslant y$. D'après ci-dessus

$$\forall t\in]1,+\infty[\qquad \frac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}\geqslant\frac{1}{t^y\sqrt{t^2-1}}$$

Donc par croissance de l'intégrale, $f(x)\geqslant f(y)$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est décroissante sur } I}$

7) Soit $a>0$, montrons que f est dérivable sur $[a,+\infty[$. Soit $h(x,t)=\dfrac{1}{t^x\sqrt{t^2-1}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*\times]1,+\infty[$.
Posons $\varphi(t)=\dfrac{\ln(t)}{t^a\sqrt{t^2-1}}$ pour $t\in]1,+\infty[$. φ est continue et positive (car $t\geqslant 1$ donc $\ln t\geqslant 0$).
Étude en $t=1$: $t=1+h$ et

$$\varphi(1+h)=\frac{\ln(1+h)}{(1+h)^a\sqrt{h}\sqrt{2+h}}\sim\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2}}$$

Donc φ est prolongeable par continuité en $t=1$ par $\varphi(1)=0$. Donc φ est intégrable en 0.
Étude au voisinage de $+\infty$:

$$\varphi(t)=\frac{\ln(t)}{t^a\sqrt{t^2-1}}\sim\frac{1}{t^{a+1}(\ln t)^{-1}}$$

On reconnaît une intégrale de Bertrand qu'il faudrait étudier (cf cours). Donc φ est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Donc φ est intégrable sur $]1,+\infty[$.
<u>Théorème de dérivation</u> :

- $\forall t \in]1,+\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}$.
- $\forall x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]1,+\infty[$ (d'après 1)) ;
  la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]1,+\infty[$.
- Soit $\varphi :]1,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ la fonction définie ci-dessus. φ est **intégrable sur** $]1,+\infty[$ d'après les préliminaires, et

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]1,+\infty[, \qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}} \leqslant \frac{\ln(t)}{t^a\sqrt{t^2-1}} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou théorème de Leibniz), il vient

$$\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,+\infty[\text{ et } f'(x) = \int_1^{+\infty} -\frac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t.}$$

Comme ce résultat est vrai pour tout $a > 0$, $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \bigcup_{a>0} [a,+\infty[= I}$

Comme $\dfrac{\ln(t)}{t^x\sqrt{t^2-1}} \geqslant 0$ sur $]1,+\infty[$, $f' \leqslant 0$ par croissance de l'intégrale, puis $\boxed{f \text{ décroissante sur } I}$

8) Soit $x \in I$ fixé.
$v' : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1,+\infty[$ et $v : t \mapsto \sqrt{t^2-1}$ en est une primitive.
$u : t \mapsto \dfrac{1}{t^{x+1}}$ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ de dérivée $u' : t \mapsto -\dfrac{(x+1)}{t^{x+2}}$.
$u \times v : t \mapsto \dfrac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+1}}$ est de limite nulle en 1 et en $+\infty$.
Comme l'intégrale de gauche ($f(x)$) converge, le théorème d'intégration par partie s'écrit

$$f(x) = [uv]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -(x+1)\frac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+2}}\ \mathrm{d}t = (x+1)\int_1^{+\infty} \frac{t^2-1}{t^{x+2}\sqrt{t^2-1}}\ \mathrm{d}t$$

En cassant la fraction, comme toutes les intégrales existent, on a alors

$$f(x) = (x+1)\left(f(x) - f(x+2)\right)$$

On en déduit que

$$\boxed{f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)}$$

9) Montrons par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ f(2p) = \frac{4^{p-1}(p!)^2}{(2p-1)!}$$

- <u>Initialisation</u> : le résultat est vrai pour $p = 1$ car $f(2) = 1$.
- <u>Hérédité</u> : soit $p \geqslant 2$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang $p-1$. On connaît alors $f(2p-2)$ et la question précédente donne $f(2p)$ en fonction de $f(2(p-1))$. On obtient le résultat au rang p en combinant les résultats.

10) Soit $x > 0$. On a

$$\varphi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x+2) = (x+1)f(x+1)\frac{x}{x+1}f(x) = \varphi(x)$$

Donc φ est périodique de période 1. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = \varphi(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

11) φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, comme f. On a donc, avec la question précédente,

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} \varphi(x+1) = \varphi(1) = f(1)f(2) = f(1)$$

Or, $\varphi(x) \sim_{0^+} xf(x)f(1)$ et donc $xf(x) \to 1$ quand $x \to 0^+$ et ainsi

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$$

12) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = \dfrac{\pi}{2}$ (question 10). Ceci s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2n}$$

D'après lé décroissance et positivité de f,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(n+1)^2 \leqslant f(n)f(n+1) \leqslant f(n)^2$$

On en déduit, en décalant les inégalités, que

$$\forall n \geqslant 2, \qquad f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2n} \leqslant f(n)^2 \leqslant \frac{\pi}{2(n-1)} = f(n-1)f(n)$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)^2}{\pi/(2n)} = 1$ par encadrement. On a finalement

$$f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

13) Toujours par décroissance de f, on a $\forall x \geqslant 1,\ f(\lceil x\rceil) \leqslant f(x) \leqslant f(\lfloor x\rfloor)$. Comme $\lfloor x\rfloor$ et $\lceil x\rceil$ équivalent tout deux à x au voisinage de $+\infty$ (ils différent de x de moins de 1 qui est négligeable devant x) la question précédente donne que le majorant et le minorant sont tous deux équivalents à $\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$ et donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

14) On a décroissance de f. La courbe aux voisinage de 0 et de $+\infty$ est proche de celle des fonctions équivalentes trouvées.

15) Avec ce qui précède, φ tend vers $\pi/2$ quand $x \to +\infty$. Or, pour tout x on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(x) = \varphi(x+n)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall x > 0,\ \varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x+n) = \frac{\pi}{2}$$