Devoir de Mathématiques numéro 2

Exercice 1

Pour tout réel $x \geqslant 0$, on pose :

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

On admet que I converge et que $I \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

1) Montrer que h est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) Que vaut $h(0)$?

3) **a)** Soit a un réel strictement positif. Montrer que h est dérivable sur $[a, +\infty[$.

b) Montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$.

4) Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire que,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad 0 \leqslant h(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

5) Montrer que h vérife, pour tout $x > 0$, l'équation différentielle $(\mathscr{E})$:

$$h'(x) - h(x) = -\frac{I}{\sqrt{x}}$$

6) **a)** Donner la solution générale, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation homogène $(\mathscr{E}_0)$ associée à $(\mathscr{E})$.

b) Soit $x_0 > 0$. À l'aide d'une intégrale, exprimer la primitive s'annulant en x_0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$.

c) Soit $x_0 > 0$. Montrer qu'il existe un réel k tel que,

$$\forall x > 0, \qquad h(x) = \left(k - I\int_{x_0}^{x} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\right)e^x \tag{1}$$

7) **a)** Montrer que pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ est convergente, et que

$$\int_0^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) En faisant tendre x vers 0 dans (1), donner une expression de k à l'aide d'une intégrale, et en déduire que

$$\forall x \geqslant 0, \qquad h(x) = \left(\frac{\pi}{2} - 2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)e^x$$

8) Montrer que,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - 2I\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}e^{-x}$$

9) En déduire la valeur de I.

Exercice 2

On pose, lorsque cela est possible

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x\sqrt{t^2-1}}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition I de f.

2) En justifiant son existence, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

3) Calculer $f(1)$. *On pourra utiliser l'application* $\varphi\ :\ u > 0 \mapsto \mathrm{ch}(u)$.

4) Calculer $f(2)$. *On pourra remarquer que la dérivée de* $x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$ *est égale à* $x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$.

5) Vérifier que f est positive sur I.

6) Montrer que f est décroissante sur I.

7) Prouver que f est de classe C^1 sur I et préciser l'expression de $f'(x)$. Retrouver alors le résultat de la question précédente.

8) Soit $x \in I$. Démontrer la relation

$$f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)$$

On pourra effectuer, en la justifiant, une intégration par parties.

9) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Donner l'expression de $f(2p)$ à l'aide de factorielles.

10) Pour tout réel $x > 0$, on pose

$$\varphi(x) = x f(x) f(x+1)$$

Prouver que $\varphi(x+1) = \varphi(x)$. Calculer $\varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

11) En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

12) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n)f(n+1) = \dfrac{\pi}{2n}$. En déduire que

$$f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}^*}}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

13) En utilisant des parties entières, prouver que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

14) Déduire des questions précédentes le tableau des variations de f sur I et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

15) Prouver que la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.