

Devoir de Mathématiques numéro 1

Correction

Exercice 1 (CAPES 2009, partie I)

A. Intégrales de Wallis *cette partie est extrêmement classique, donc à connaître.*

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

1) **a)** Soit $n \geqslant 0$. On effectue le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - u$.
Donc $\cos(t) = \cos(\pi/2 - u) = \sin(u)$ et $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$.

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n u(-1)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \,\mathrm{d}u$$

Remarque : t est une variable *muette*, comme k dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$. Elle n'existe qu'entre $\displaystyle\int$ et $\mathrm{d}t$.

Ainsi on peut réutiliser cette variable un peu plus loin : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$.

Conclusion : $\boxed{W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t}$

b) $\boxed{W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\cos^n t \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale, $W_n \geqslant 0$.
Supposons que $W_n = 0$. Puisque $t \mapsto \cos^n t$ est continue, alors $\cos^n t = 0$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$, ce qui est absurde (par exemple $\cos 0 = 1$).
Ainsi, $\boxed{W_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

c) Soit $n \geqslant 2$. Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t) \times (\cos^{n-1} t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[(\sin t) \times (\cos^{n-1} t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)\Big(-(n-1)(\sin t)(\cos^{n-2} t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)(\cos^{n-2} t)\,\mathrm{d}t = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)\cos^{n-2} t \,\mathrm{d}t \\
&= (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\boxed{nW_n = (n-1)W_{n-2}.}$

d) Posons, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = nW_nW_{n-1}$. Alors, d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = (nW_n)W_{n-1} = (n-1)W_{n-2}W_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2} = u_{n-1}$$

La suite $(u_n)_n$ est donc géométrique de raison 1 et de premier terme $u_1 = W_0W_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Par conséquent, $\boxed{\text{La suite } u_n = nW_nW_{n-1} \text{ est constante de valeur } \dfrac{\pi}{2}.}$

2) **a)** Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leqslant \cos t \leqslant 1$$

Donc pour tout $n \geqslant 0$, $\cos^n t \geqslant 0$ et

$$0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$$

En intégrant cet encadrement, il vient $W_{n+1} \leqslant W_n$, c'est-à-dire $\boxed{(W_n) \text{ est décroissante.}}$
Soit $n \geqslant 2$. D'après 1)c), $nW_n = (n-1)W_{n-2}$. Ainsi, puisque (W_n) est décroissante,

$$\frac{n-1}{n} W_{n-1} \leqslant \frac{n-1}{n} W_{n-2} = W_n \leqslant W_{n-1}$$

Puisque $W_k > 0$ d'après 1)b), il reste à diviser par W_{n-1} et constater que l'inégalité est vraie en $n = 1$: $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ \frac{n-1}{n} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1.}$

b) Rappel : Pour des suites non nulles au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$.

D'après 1)d), $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc $\frac{1}{W_{n-1}} = \frac{2}{\pi} nW_n$ et l'encadrement de la question 2)a) s'écrit :

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \frac{2}{\pi} nW_n^2 \leqslant 1$$

Donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi} nW_n^2 = 1$, c'est-à-dire $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ et, comme $W_n > 0$,

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

B. Formule de Stirling

1) **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}} \frac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n} = \frac{n^n\sqrt{n}}{(n+1)^n\sqrt{n+1}} e = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} e$$

Donc $\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} e}$

b) Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)$, d'après 1)a)

$$v_n = \ln\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} e\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1$$

Finalement : $\boxed{v_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1}$

Comme on ne précise pas la formule à obtenir, du moment que vous avez simplifié les factorielles et un peu débroussaillé le reste, ça va. Le but est de faciliter l'obtention du DL à la question suivante.

c) Comme le développement de $\ln(1-u)$ en 0 est $\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$, il vient :

$$\begin{aligned}
v_n &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 1 \\
&= -1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{v_n = -\dfrac{1}{12n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)}$

d) D'après la question précédente, $|v_n| \sim \dfrac{1}{12}.\dfrac{1}{n^2}$.

Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$).

Ainsi, par équivalent, la série $\sum v_n$ est absolument convergente donc convergente.

Conclusion : $\boxed{\text{La série } \sum v_n \text{ est convergente}}$

e) La série $\sum v_n$ est télescopique : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} \big(\ln u_k - \ln u_{k-1}\big) = \ln u_n - \ln u_1 = (\ln u_n) - 1$.

Or cette série converge, donc $\boxed{(\ln u_n)_n \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R}}$

Par continuité de la fonction exponentielle, $\boxed{\text{la suite } u_n = e^{\ln(u_n)} \text{ converge donc aussi}}$, et sa limite est $K = e^{\ell} > 0$.

Comme $K > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = K$ peut s'écrire $u_n \sim K$, c'est-à-dire

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \sim K$$

La compatibilité des équivalent avec le produit nous donne

$$\boxed{n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$$

2) **a)** Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(p): \quad W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

est vraie pour tout $p \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ D'après 1)b), $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{(2^0 0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(p)$ vraie : $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)} &= W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} \qquad\qquad \text{(d'après 1)c))}\\
&= \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2(p+1))^2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}
\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}(p+1)$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall p \geqslant 0 \qquad W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}}$

D'après 1)d), pour tout $p \geqslant 0$, $W_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{(2p+1)W_{2p}}$. Ainsi

$$W_{2p+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2p+1} \times \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!}\frac{2}{\pi} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

b) D'après B.1)e),

$$p! \sim Kp^p e^{-p}\sqrt{p} \qquad \text{et} \qquad (2p)! \sim K2p^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}$$

Donc d'après B.2)a)

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{K(2p)^{2p}e^{-2p}\sqrt{2p}}{(2^p K p^p e^{-p}\sqrt{p})^2}\frac{\pi}{2} = \frac{K}{K^2} \times \frac{2^{2p}}{2^{2p}} \times \frac{p^{2p+1/2}}{p^{2p+1}} \times \frac{e^{-2p}}{e^{-2p}} \times \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\frac{\pi}{4p}}$$

c) D'après B.2)b), $W_{2p} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$. De plus, d'après A.2)b), $W_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$.

Donc, par transitivité, $\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}} \sim \dfrac{\sqrt{2\pi}}{K}\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$, et ainsi $\boxed{K = \sqrt{2\pi}}$

En conclusion,

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

C'est ce qu'on appelle la formule de Stirling.

Exercice 2 (E3A PSI 2016)

Soit n un entier naturel non nul.

1) $u = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Ainsi $\boxed{|u| = 2\left|\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|}$

Si $|u| \neq 0$, c'est-à-dire $\theta \neq \pi$, l'argument existe et

$$\boxed{\arg u = \begin{cases} \dfrac{\theta}{2}\ [2\pi] & \text{si } \theta \in [0,\pi[\\ -\dfrac{\theta}{2}\ [2\pi] & \text{si } \theta \in]\pi, 2\pi[\end{cases}}$$

2) **a)** Etude des cas $n=1$ et $n=2$ *On rappelle la factorisation suivante – toujours la série géométrique :*

$$(X^n - 1) = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1)$$

D'où l'on déduit, via $X = a/b$,

$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

i)

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2i}\Big((X+i)^3 - (X-i)^3\Big) \\ &= \frac{1}{2i}(X+i-X+i)((X+i)^2 + (X+i)(X-i) + (X-i)^2) \\ &= (X^2+2i-1) + (X^2+1) + (X^2-2i-1) \\ &= 3X^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2i}\Big((X+i)^5 - (X-i)^5\Big) \\ &= \frac{1}{2i}(X+i-X+i)\Big[(X+i)^4 + (X+i)^3(X-i) + \big((X+i)(X-i)\big)^2 \\ &\qquad + (X+i)(X-i)^3 + (X-i)^4\Big] \\ &= 2\Re\Big((X+i)^4 + (X+i)^3(X-i)\Big) + (X^2+1)^2 \\ &= 2X^4 - 12X^2 + 2 + 2(X^2-1)(X^2+1) + X^4 + 2X^2 + 1 \\ &= 5X^4 - 10X^2 + 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P_1 = 3X^2 - 1 \text{ et } P_2 = 5X^4 - 10X^2 + 1}$

ii) Comme P_1 est de degré 2 et P_2 de degré 4, $\boxed{P_1 \in \mathbb{R}_2[X] \text{ et } P_2 \in \mathbb{R}_4[X]}$

Un polynôme irréductible est un polynôme qui ne peut pas s'écrire comme un produit de polynôme non constants de degré plus petit.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 ou les polynômes de degré 2 sans racines réelles. Par exemple, un polynôme de degré 4 sans racines réelles aura 4 racines complexes z_1, $\bar{z}_1$, z_2, $\bar{z}_2$, et en regroupant les racines conjuguées on l'écrit comme un produit de polynômes de degré 2.
Ainsi P_2 n'est pas irréductible car il est de degré 4, et $P_1 = (\sqrt{3}X - 1)(\sqrt{3}X + 1)$ donc n'est pas irréductible non plus.
Conclusion : $\boxed{P_1 \text{ et } P_2 \text{ ne sont pas irréductibles}}$

b) Cas général

i) P_n est différence de deux polynômes de degré $2n+1$ et est donc dans $\mathbb{C}_{2n+1}[X]$. Le coefficient de X^{2n+1} dans P_n est
$$\frac{1}{2i}(1-1) = 0$$
et donc $P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. Le coefficient de X^{2n} dans P_n est
$$\frac{1}{2i}((2n+1)i - (2n+1)(-i)) = 2n+1 \neq 0$$
Ainsi, P_n est de degré $2n$ et son coefficient dominant est $2n+1$.

ii) Les racines N-ièmes de l'unité sont les complexes
$$e^{\frac{2ik\pi}{N}} \quad \text{pour} \quad k = 0, \ldots, N-1$$

iii) On a
$$P_n(i) = \frac{(2i)^{2n+1}}{2i} = 2^{2n}(-1)^n$$

iv) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. En remplaçant P_n par son expression il vient
$$P_n(\alpha) = 0 \iff (\alpha + i)^{2n+1} - (\alpha - i)^{2n+1} = 0 \iff (\alpha + i)^{2n+1} = (\alpha - i)^{2n+1}$$
Puis, en passant au module,
$$P_n(\alpha) = 0 \Longrightarrow |\alpha + i|^{2n+1} = |\alpha - i|^{2n+1} \Longrightarrow |\alpha + i| = |\alpha - i|$$
La dernière égalité signifie, géométriquement, que le point d'affixe α est équidistant des points d'affixes i et $-i$. Donc, en identifiant affixes et points, les racines sont sur la médiatrice du segment $[i, i]$, c'est-à-dire l'axe des réels.
Conclusion : $\boxed{\text{Les racines de } P_n \text{ sont réelles}}$

v) Supposons que a soit racine de P_n. On a alors $a \neq i$ (d'après iii) et $\left(\frac{a+i}{a-i}\right)^{2n+1} = 1$. Il existe donc $k \in [\![0, 2n+1]\!]$ tel que
$$\frac{a+i}{a-i} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$$
et donc, en développant,
$$a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$$
On remarque alors que $k \neq 0$ car pour $k = 0$ la relation précédente est fausse ($0 \neq i$).
Réciproquement, si $a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)$ avec $k \in [\![0, 2n]\!]$, on a $(a+i) = (a-i)e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$. En élevant à la puissance $2n+1$ on trouve que $(a+i)^{2n+1} = (a-i)^{2n+1}$ et donc que $P_n(a) = 0$

vi) Les racines de P_n sont donc les
$$a_k = \frac{i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1)}{(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1)} = i\frac{2\cos(k\pi/(2n+1))}{2i\sin(k\pi/(2n+1))} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$
pour $k = 1, \ldots, 2n$. On trouve bien des racines toutes réelles.
Remarque : cotan *étant bijective de* $]0, \pi[$ *dans* $\mathbb{R}$ *et les* $2k\pi/(2n+1)$ *étant dans* $]0, \pi[$, *les* a_k *sont 2 à 2 distincts. Il y en a* $2n$ *et* P_n *est de degré* $2n$. *On a donc* $2n$ *racines simples et* P_n *est scindé simple sur* $\mathbb{R}[X]$.

vii) On développe les deux puissances par formule du binôme et on regroupe les termes :

$$2iP_n(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k i^{2n+1-k}(1-(-1)^{2n+1-k})$$

Les termes d'indice k impairs sont nuls : $1-(-1)^{2n+1-k} = 0$ dans ce cas. Il reste donc

$$2iP_n(X) = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^{2k} i^{2n+1-2k} = 2i\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} X^{2k}$$

On en déduit que

$$P_n(X) = Q_n(X^2) \ \text{ avec } \ Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^{n-k} X^k$$

viii) 2.a.i donne

$$Q_1 = 3\left(X - \frac{1}{3}\right) \quad \text{et} \quad Q_2 = 5X^2 - 10X + 1 = 5\left(X - \frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)\left(X - \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right)$$

La factorisation donne les racines.

ix) Si a est racine de P_n alors a^2 est racine de Q_n. En particulier, on a les racines

$$\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

pour $k = 1, \dots, n$. Ces racines sont distinctes car les a_k sont distincts et positifs pour ces valeurs de k (les carrés sont donc aussi distincts). Ceci donne n racines distinctes de Q_n qui est de degré n et donc toutes ses racines.

3) S_n est la somme des racines b_k de Q_n qui est scindé à racines simples et s'écrit (son coefficient dominant est celui de P_n)

$$Q_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}(X - b_k) = (2n+1)\left(X^n - \sum_{k=1}^{n} b_k X^{n-1} + \dots + (-1)^n b_1 \dots b_n\right)$$

On voit que l'on a besoin du coefficient de X^{n-1} dans Q_n qui vaut $-\binom{2n+1}{2n-2}$. On a ainsi

$$S_n = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{2n-2} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{3} = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

4) Pour voir que $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$, on montre que a courbe de sin est sur $[0, \pi/2[$ sous sa tangente et celle de tan au-dessus. Il s'agit donc d'inégalités de convexité (sin est concave sur $[0, \pi/2[$ puisqu'à dérivée seconde négative ; tan est convexe sur cet intervalle puisqu'à dérivée seconde positive). $\sin(x) \geqslant 0$ est immédiat sur $[0, \pi/2[$.
Comme $y \mapsto 1/y^2$ décroît sur $\mathbb{R}^{+*}$, on en déduit que

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \ \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

5) Pour $k = 1, \dots, n$, $\dfrac{k\pi}{2n+1} \in]0, \pi/2[$ et donc

$$S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leqslant n + S_n$$

ce qui donne

$$\frac{\pi^2 S_n}{(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2(n+S_n)}{(2n+1)^2}$$

Avec l'expression de S_n, majorant et minorant ont pour limite $\pi^2/6$. Par théorème d'encadrement, il en est de même pour le terme du milieu de notre double inégalité. La série proposée converge (ce que l'on sait car c'est une série de Riemann convergente) et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 3 (CAPES 2010 – corrigé UPS)

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $[p, p+1]$ donc $\forall t \in [p, p+1]$, $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{p}$.

En intégrant cette inégalité entre p et $p+1$, on obtient : $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{p}$

(C'est un classique de la comparaison série/intégrale. Raisonnement à maîtriser parfaitement.)

Puis $-\dfrac{1}{p} \leqslant -\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant -\frac{1}{p+1}$ et finalement

$$\boxed{0 \leqslant a_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}}$$

2)
- En additionnant les inégalités précédents pour p variant de 1 à n, on obtient

$$0 \leqslant \sum_{p=1}^{n} a_p \leqslant \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1$$

  Donc la suite (S_n) est majorée.
- $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqslant 0$ donc la suite (S_n) est croissante ; étant majorée, elle converge, vers une limite notée γ.
- De l'encadrement $0 \leqslant S_n \leqslant 1$ trouvé ci-dessus, on déduit par passage à la limite $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

3) $a_p = \dfrac{1}{p} - \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{p} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u+p}$ en faisant le changement de variable $t = u + p$.

D'où $a_p = \dfrac{1}{p} \displaystyle\int_0^1 \left(1 - \frac{p}{u+p}\right) \mathrm{d}u = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{u}{u+p} \mathrm{d}u$.

Pour $u \in [0, 1]$, $\dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{u+p} \leqslant \dfrac{1}{p}$ donc, d'après le calcul ci-dessus :

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+1} \cdot \int_0^1 u \,\mathrm{d}u \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} \cdot \int_0^1 u \,\mathrm{d}u$$

d'où, pour $p \geqslant 2$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant a_p \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$$

4) Soient m et n des entiers tels que $m > n \geqslant 1$. Alors $S_m - S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{m} a_p - \sum_{p=1}^{n} a_p = \sum_{p=n+1}^{m} a_p$ donc d'après l'encadrement précédent :

$$\frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{m} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leqslant S_m - S_n \leqslant \frac{1}{2} \sum_{p=n+1}^{m} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right)$$

d'où après télescopage :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right) \leqslant S_m - S_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)$$

et, en faisant tendre m vers $+\infty$:

$$\boxed{\frac{1}{2(n+1)} \leqslant \gamma - S_n \leqslant \frac{1}{2n}}$$

5) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $H_n = S_n + \ln(n+1)$ donc

$$H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n} = S_n - \gamma - \frac{1}{2n} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{=} S_n - \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

en utilisant le développement limité $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$.

Or, d'après l'inégalité précédente :

$$0 \leqslant S_n - \gamma + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2n(n+1)}$$

ce qui montre que $S_n - \gamma + \frac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où finalement :

$$\boxed{H_n \underset{n\to\infty}{=} \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\ .}$$

6) Il suffit de reprendre l'inégalité trouvée à la question 4.

7) Pour $n = 7$, l'inégalité précédente donne $0 \leqslant \gamma - T_n \leqslant \frac{1}{112} < 10^{-2}$, donc T_7 convient.

On trouve $T_7 = \frac{1487}{560} - 3 * \ln(2) \approx 0.575915601$ alors que $\gamma \approx 0.57721566490153286061$.