Lycée La Prat's
Classe de PT

Pour le Jeudi 17 septembre 2015

Devoir de Mathématiques numéro 1

Correction

Exercice 1 (Inspiré de CN Marocain & CCP-Deug 2009 & CAPES 2009 & E3

C. Polynômes de Bernoulli

1) Définitions.

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ fixé.

Unicité [1] :

Soit Q_1 et $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ qui conviennent. Alors $Q_1' = Q_2' = P$ donc $(Q_1 - Q_2)' = 0$ et $Q_1 - Q_2 = K$ est un polynôme constant.

Or $\displaystyle\int_0^1 (Q_1(x) - Q_2(x))\,\mathrm{d}x = K = \int_0^1 Q_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 Q_2(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Donc $Q_1 = Q_2$ et on a montré l'unicité.

Existence : Notons $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $\widetilde{Q}(X) = \sum k = 0^n \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$. Alors le polynôme $Q(X) = \widetilde{Q}(X) - \displaystyle\int_0^1 \widetilde{Q}(x)\,\mathrm{d}x$ convient : $Q' = \widetilde{Q}' = P$ et

$$\int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\widetilde{Q}(x) - \int_0^1 \widetilde{Q}(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \widetilde{Q}(x)\,\mathrm{d}x - 1 \times \int_0^1 \widetilde{Q}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{Il existe un unique } Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } Q' = P \text{ et } \int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x = 0.}$

b) Montrons par récurrence qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(B_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$B_0(X) = 1 \qquad \forall n \geqslant 1,\quad B_n' = nB_{n-1} \qquad \forall n \geqslant 1,\quad \int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Pour tout $n \geqslant 0$, posons $\mathcal{H}(n)$: B_n existe et est unique.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $B_0 = 1$, donc est unique.
- $\underline{\mathcal{H}_{n-1} \Longrightarrow \mathcal{H}_n}$: Supposons que $\mathcal{H}(n-1)$ est vraie, c'est-à-dire que B_{n-1} est construit. Alors, d'après la propriété montrée en 1)a), il existe un unique polynôme B_n tel que $B_n' = nB_{n-1}$ et que $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$. D'où $\mathcal{H}(n)$ vraie.
- Conclusion : $\forall n \geqslant 0$ $\boxed{B_n \text{ existe et est unique.}}$

c) $B_0 = 1 \quad B_1 = X - \frac{1}{2} \quad B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6} \quad B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X \quad B_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$

$b_0 = 1 \quad b_1 = -\frac{1}{2} \quad b_2 = +\frac{1}{6} \quad b_3 = 0 \quad b_4 = -\frac{1}{30}$

2) **a)** B_n est de degré n.

---

1. Dans ce genre de situation — sauf gros théorème qui donne existence+unicité — il vaut mieux commencer par l'unicité, pour comprendre la propriété à vérifier

b) Soit $n \geqslant 2$. On a $B_n' = nB_{n-1}$ et $n-1 \geqslant 1$ donc

$$0 = \int_0^1 B_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{B_n'}{n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\left[B_n(x)\right]_0^1 = \frac{1}{n}(B_n(1) - B_n(0))$$

Ainsi $\boxed{B_n(0) = B_n(1).}$

c) Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Par définition, B_{n+1} est une primitive de $(n+1)B_n$ de terme constant b_{n+1} :

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x) &= b_{n+1} + \int_0^x (n+1)B_n(t)\,\mathrm{d}t = b_{n+1} + \int_0^x (n+1)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b_{n-k} t^k\right)\mathrm{d}t \\ &= b_{n+1} + \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} b_{n-k} t^k\right)\mathrm{d}t = b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} b_{n-k} x^{k+1} \\ &= b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} b_{(n+1)-(k+1)} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} x^k \end{aligned}$$

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\forall n \geqslant 0 \qquad B_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$

d) D'après la question 2)b), pour tout $n \geqslant 1$, $B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1)$, ce qui s'écrit, d'après 2)c),

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} = b_{n+1} + (n+1)b_n + \sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n+1}{k'} b_{k'}$$

En conclusion, $\boxed{b_n = -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k.}$

$$b_5 = -\frac{1}{6}\left(b_0 + 6b_1 + 15b_2 + 20b_3 + 15b_4\right) = -\frac{1}{6}(1 - 3 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}) = 0$$

$$b_6 = -\frac{1}{7}b_0 - b_1 - 3b_2 - 5b_3 - 5b_4 - 3b_5 = -\frac{1}{42}$$

(Pensez au triangle de Pascal pour calculer les coefficients binomiaux)

e) Montrons que la suite C_n vérifie les conditions du 1)b).

- $C_0(X) = B_0(1 - X) = 1$
- Pour tout $n \geqslant 1$, $C_n'(X) = (-1)^n \times (-1)B_n'(1 - X) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1 - X) = nC_{n-1}'(X)$.
- Effectuons le changement de variable $t = 1 - x$:

$$\int_0^1 C_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int_0^1 B_n(1 - x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int_1^0 B_n(t)(-1)\,\mathrm{d}t = 0$$

Donc, par unicité de la suite (B_n) (question 1)b)), $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 0 \text{ on a } C_n(X) = B_n(X).}$

f) $\forall n \geqslant 0$, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$; et d'après 2)b), $\forall n \geqslant 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.
Donc pour tout $n \geqslant 1$, $b_{2n+1} = B_{2n+1}(0) = -B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(1)$, et finalement $\boxed{b_{2n+1} = 0.}$
En évaluant en $X = 1/2$ on trouve que, pour tout $n \geqslant 0$, $B_{2n+1}(1/2) = -B_{2n+1}(1/2)$ donc $\boxed{B_{2n+1}(1/2) = 0.}$

3) **a)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul de signe constant sur $[0,1]$, tel que $\displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

La fonction $x \mapsto P(x)$ est continue sur $[0,1]$, de signe constant sur cet intervalle, et d'intégrale nulle. Donc P est nul sur $[0,1]$. Or le seul polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul : $P = 0$.

Ce qui contredit l'hypothèse $P \neq 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{Si } P \text{ est non nul et de signe constant sur } [0,1], \text{ alors } \displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x \neq 0.}$

b) Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété $\mathcal{H}(n)$:

- ⋆ B_{2n} vérifie
  - $(-1)^n B_{2n}(0) < 0 \qquad (-1)^n B_{2n}(1) < 0 \qquad (-1)^n B_{2n}(1/2) > 0$
  - la fonction $(-1)^n B_{2n}$ est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
- ⋆ B_{2n+1} vérifie
  - $(-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}(1) = (-1)^n B_{2n+1}(1/2) = 0$
  - il existe deux réels $\alpha_{2n+1} \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\beta_{2n+1} \in]\frac{1}{2}, 1[$ tels que la fonction $(-1)^n B_{2n+1}$ soit strictement décroissante sur $[0, \alpha_{2n+1}]$, puis strictement croissante sur $[\alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}]$, puis strictement décroissante sur $[\beta_{2n+1}, 1]$.

Ce qui peut aussi s'écrire

x	0		α_n		$\frac{1}{2}$		β_n		1
$(-1)^n B_{2n}$	$(-1)^n B_{2n}(0) < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$(-1)^n B_{2n}(\frac{1}{2}) > 0$	$\searrow$	0	$\searrow$	$(-1)^n B_{2n}(1) < 0$
signe de $(-1)^n B_{2n}(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$(-1)^n B_{2n+1}$	0	$\searrow$	$(-1)^n B_{2n+1}(\alpha_n)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$(-1)^n B_{2n+1}(\beta_n)$	$\searrow$	0
signe de $(-1)^n B_{2n+1}(x)$			$-$		0		$+$		

Justification des tableaux de signes :

- La dérivée de $(-1)^n B_{2n+1}$ (dont on connaît les variations) est $(2n+1)(-1)^n B_{2n}$ par définition des polynômes de Bernoulli, d'où le signe de $(-1)^n B_{2n}(x)$ et les valeurs en α_n et β_n.
- Le signe de $(-1)^n B_{2n+1}(x)$ est une conséquence du tableau de variations de $(-1)^n B_{2n+1}$, sachant que $(-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}(1) = (-1)^n B_{2n+1}(1/2) = 0$

$\boxed{\mathcal{H}_1}$: Étudions $(-1)^1 B_2(X) = -X^2 + X - \frac{1}{6}$ et $(-1)^1 B_3(X) = -X^3 + \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$.

- ⋆ $-B_2'(x) = -2x+1$ s'annule en $1/2$, de tableau de signe immédiat, d'où le tableau de variation de $-B_2$. De plus $-B_2(0) = -B_2(1) = -\frac{1}{6} < 0$ et $-B_2(1/2) = \frac{1}{12} > 0$.

  La fonction $-B_2$ est continue, strictement monotone sur $[0, 1/2]$ et sur $[1/2, 1]$, ayant des valeurs de signes opposés aux extrémités de ces intervalles, s'annule donc exactement une fois sur chacun de ces intervalles, en des valeurs que l'on notera respectivement α_1 et β_1 (théorème de la bijection).

De plus, sur les intervalles $]0, \alpha_1[$ et $]\beta_1, 1[$, $-B_2 < 0$; et sur l'intervalle $]\alpha_1, \beta_1[$, $-B_2 > 0$.

⋆ $-B_3'(x) = 3(-B_2(x))$ donc on déduit de ci-dessus le tableau de signe de $-B_3'(x)$, puis le tableau de variation de $-B_3$ (voir ci-dessous).

D'après 2)f) et 2)b), $-B_3(1/2) = 0$ et $-B_3(0) = -B_3(1) = -b_3 = 0$

Donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie. Tableau récapitulatif :

x	0		α_1		$\frac{1}{2}$		β_1		1
$-B_2$	$-B_2(0) < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-B_2(\frac{1}{2}) > 0$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-B_2(1) < 0$
signe de $-B_2(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$-B_3$	0	$\searrow$	$-B_3(\alpha_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-B_3(\beta_1)$	$\searrow$	0
signe de $-B_3(x)$			$-$		0		$+$		

$\boxed{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. On a donc les tableaux de variations et de signes de la page 3.

⋆ Étude de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$.

- Variations : $(-1)^{n+1}B_{2n+2}' = -(2n+2)(-1)^n B_{2n+1}$ donc le tableau de signe de la dérivée de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$ est l'opposé de la dernière ligne du tableau $\mathcal{H}(n)$. On obtient le tableau de variations suivant

x	0		$\frac{1}{2}$		1
signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}'(x)$		$+$	0	$-$	
$(-1)^{n+1}B_{2n+2}$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0)$	$\nearrow$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(\frac{1}{2})$	$\searrow$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(1)$

- Signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$ en 0 ,$\frac{1}{2}$ et 1 : D'après 2)b) $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0) = (-1)^{n+1}B_{2n+2}(1)$.
Si ce nombre est positif ou nul, alors $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$ est de signe constant sur $[0, 1]$ (tableau de variations). Or par définition des polynômes de Bernoulli, $\int_0^1 B_{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ainsi, d'après 3)a), $B_{2n+2} = 0$. Or la fonction $x \mapsto (-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$ est *strictement* croissante sur $[0, 1/2]$, donc c'est absurde. Ainsi $\boxed{(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0) = (-1)^{n+1}B_{2n+2}(1) < 0.}$

De même, si $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(\frac{1}{2}) \leqslant 0$, $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$ est de signe constant et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, ce qui est absurde. Donc $\boxed{(-1)^{n+1}B_{2n+2}(\frac{1}{2}) > 0.}$

- Tableau de signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$: De même que lors de l'étude du signe de $-B_2$, on applique le théorème de la bijection sur les intervalles $[0,1/2]$ et $[1/2,1]$, ce qui nous donne l'existence de α_{n+1} et β_{n+1} et le tableau de signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$. (voir le tableau récapitulatif en fin de paragraphe).

⋆ Étude de $(-1)^{n+1}B_{2n+3}$.

- Variations : Le tableau de signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$ est le même que celui de la dérivée $(-1)^{n+1}B'_{2n+3} = (2n+3)(-1)^{n+1}B_{2n+2}$, d'où le tableau de variations (voir tableau récapitulatif).
- Valeur de $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(x)$ en 0 ,$\frac{1}{2}$ et 1 : D'après 2)b) et 2)f), il vient $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(\frac{1}{2}) = 0$ et $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(0) = (-1)^{n+1}B_{2n+3}(1) = (-1)^{n+1}b_{2n+3} = 0$.
- Le signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(x)$ s'obtient par lecture du tableau de variations.

On a donc montré que $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

Tableau récapitulatif :

x	0		α_{n+1}		$\frac{1}{2}$		β_{n+1}		1
$(-1)^{n+1}B_{2n+2}$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0) < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(\frac{1}{2}) > 0$	$\searrow$	0	$\searrow$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(1) < 0$
signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$(-1)^{n+1}B_{2n+3}$	0	$\searrow$	$(-1)^{n+1}B_{2n+3}(\alpha_n)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$(-1)^{n+1}B_{2n+3}(\beta_n)$	$\searrow$	0
signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(x)$			$-$		0		$+$		

$\boxed{\text{Conclusion}}$: $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

c) Soit $p \geqslant 1$. D'après la question 3)b), $(-1)^p b_{2p} = (-1)^p B_{2p}(0)$ est négatif, donc du signe de -1. Par conséquent, le signe de b_{2p} est $(-1)^{p+1}$.

4) **a)** Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n): \quad B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\mathcal{H}_1$: $B_1(X) = X - 1/2$, donc $B_1(X+1) - B_1(X) = 1 = 1 \times X^{1-1}$. Ainsi, $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
- $\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie, c'est-à-dire, en multipliant par $(n+1)$,

$$(n+1)B_n(X+1) - (n+1)B_n(X) = (n+1)nX^{n-1}$$

En intégrant entre 0 et x le premier membre, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^x (n+1)B_n(t+1)-(n+1)B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t &= [B_{n+1}(t+1)-B_{n+1}(t)]_0^x\\ &= B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(1)-B_{n+1}(x)+B_{n+1}(0)\\ &= B_{n+1}(x+1)-B_{n+1}(x)\end{aligned}$$

puisque $n+1 \geqslant 2$, d'après 2)b), $B_{n+1}(0)=B_{n+1}(1)$. Et $\int_0^x (n+1)nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = (n+1)x^n$
Ainsi, $B_{n+1}(X+1)-B_{n+1}(X)=(n+1)X^n$, et $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad B_n(X+1)-B_n(X)=nX^{n-1}}$

b) Soit $p \geqslant 1$ et $N \geqslant 0$ deux entiers. D'après la question précédente, pour tout $k \in \{0,\dots,N\}$, $k^p = \dfrac{1}{p+1}(B_{p+1}(k+1)-B_{p+1}(k)$. La somme $S_p(N)$ devient donc télescopique :

$$\begin{aligned}S_p(N) &= \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{N}(B_{p+1}(k+1)-B_{p+1}(k)) = \frac{1}{p+1}\left(\sum_{k=1}^{N+1}B_{p+1}(k)-\sum_{k=0}^{N}B_{p+1}(k)\right)\\ &= \frac{1}{p+1}(B_{p+1}(N+1)-B_{p+1}(0)) = \frac{B_{p+1}(N+1)-b_{p+1}}{p+1}\end{aligned}$$

c) $B_{p+1}(N+1)-b_{p+1}$, c'est le polynôme B_{p+1} évalué en $N+1$ sans son terme constant :

$$\begin{aligned}S_1(N) &= \frac{B_2(N+1)-b_2}{2} = \frac{(N+1)^2-(N+1)}{2} = \frac{(N+1)(N+1-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2}\\ S_2(N) &= \frac{B_3(N+1)-b_3}{3} = \frac{(2N^2+N)(N+1)}{6} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\\ S_3(N) &= \frac{B_4(N+1)-b_4}{4} = \frac{(N+1)^4-2(N+1)^3+(N+1)^2}{4} = \frac{N^2(N+1)^2}{4}\end{aligned}$$

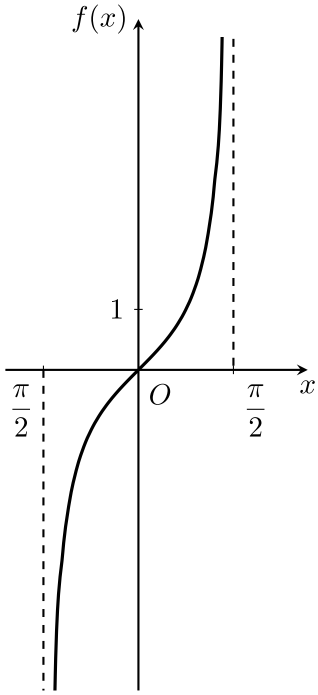
Exercice 2 (E3A PC 2015)

Partie 1

1) $\forall x \in \mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \ \mid\ k\in\mathbb{Z}\right\} \qquad \tan(x+\pi)=\dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\dfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)}=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}=tan(x)$

Ainsi, $\boxed{\text{La fonction tan est } \pi\text{-périodique}}$

2) La fonction tan est strictement croissante ($\tan' = 1+\tan^2 \geqslant 1 > 0$) et impaire. De plus $\lim\limits_{\pi/2}\tan = +\infty$ d'où une asymptote verticale en $x=\pi/2$.



3) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \text{il existe un polynôme } T_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x))$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie, avec $T_0 = X$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x))$$

En dérivant, il vient

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan^{(n+1)}(x) = (1+\tan^2(x))T_n'(\tan(x))$$

Donc, en posant $T_{n+1}(X) = (1+X^2)T_n'(X) \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan^{(n+1)}(x) = T_{n+1}(\tan(x))$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\forall n \geqslant 0 \qquad \mathcal{H}_n$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite de polynômes } (T_n) \text{ voulue existe}}$

De plus, par construction de T_{n+1}, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad T_{n+1}(X) = (1+X^2)T_n'(X)}$

4)

$$\boxed{\begin{array}{rcccl} T_1 & = & (1+X^2)T_0' & = & 1+X^2 \\ T_2 & = & (1+X^2)T_1' & = & 2X+2X^3 \\ T_3 & = & (1+X^2)T_2' & = & 2+8X^2+6X^4 \end{array}}$$

5) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \text{« Les coefficients du polynôme } T_n \text{ sont des entiers naturels » et } \deg T_n = n+1$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $T_0 = X$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_k X^k, \qquad \text{avec} \qquad \forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad a_k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad a_{n+1} \neq 0$$

D'après 3), $T_{n+1}(X) = (1+X^2)T_n'(X)$ donc

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= (1+X^2)\sum_{k=1}^{n+1} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} k a_k X^{k+1} \\ &= a_1 + 2a_2 X + \left(\sum_{k=2}^{n}\left((k+1)a_{k+1} + (k-1)a_{k-1}\right)X^k\right) + n a_n X^{n+1} + (n+1)a_{n+1}X^{n+2} \end{aligned}$$

Toujours vérifier ses calculs, par exemple avec T_1, T_2 et T_3 ci-dessus.

Les coefficients de T_{n+1} étant des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs des $a_k \in \mathbb{N}$, ce sont aussi des entiers naturels.

De plus, comme $a_{n+1} \neq 0$, $(n+1)a_{n+1} \neq 0$ donc $\deg T_{n+1} = n+2$.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad \text{« Les coefficients du polynôme } T_n \text{ sont des entiers naturels » et } \deg T_n = n+1}$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, où I est un intervalle contenant 0. La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit, en 0 :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k - \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \,\mathrm{d}t$$

On l'applique à la fonction tangente, de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc $\mathscr{C}^{2n+2}$, au rang $2n+1$, ce qui s'écrit :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k - \int_0^x \frac{\tan^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1} \,\mathrm{d}t$$

Or tangente est impaire, donc il ne reste que les termes impairs dans la formule de Taylor : *(changement d'indice dans la somme)*

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} - \int_0^x \frac{\tan^{(2n+2)}(t)}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1} \,\mathrm{d}t$$

De plus, par construction de T_k, on trouve :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{T_{2k+1}(\tan(0))}{(2k+1)!} x^{2k+1} - \int_0^x \frac{T_{2n+2}(\tan(t))}{(2n+1)!}(x-t)^{2n+1} \,\mathrm{d}t$$

Donc en posant $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ t_k = T_{2k+1}(0)}$ $(\tan(0) = 0)$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} T_{2n+2}(\tan(t)) \,\mathrm{d}t}$$

Partie 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est $\mathscr{C}^\infty$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left(\left[f^{(n)}(t) \frac{-(x-t)^n}{n} \right]_0^x - \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{-(x-t)^n}{n} \,\mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x)}$

2) Soit $b \in I$ tel que $b > 0$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $f^{(n)} \geq 0$ et $b > 0$ (donc $b - t \geqslant 0$ sur $[0, b]$), la suite $(R_n(b))$ est positive.

De plus, d'après 1), $R_{n+1}(b) = R_n(b) - \dfrac{b^n}{n!} f^{(n)}(0) \leqslant R_n(b)$.

Ainsi, la suite est décroissante et minorée par 0. Par conséquent, $\boxed{\text{La suite } (R_n(b)) \text{ est convergente}}$

b) Soient $x \in [0, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

i) En effectuant le changement de variable défini par $t = ux$ on obtient :

$$R_n(x) = \int_0^1 \frac{(x-ux)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(ux) x \,\mathrm{d}u = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(tx) \,\mathrm{d}t$$

ii) D'après les calculs du 2)a), comme $x \geqslant 0$, $R_n(x) \geqslant 0$.
De plus, $f^{(n+1)} \geqslant 0$ sur $I \cap \mathbb{R}_+$, donc $f^{(n)}$ croissante sur cet intervalle. En particulier, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant tx \leqslant tb$ entraîne $f^{(n)}(tx) \leqslant f^{(n)}(tb)$. Ainsi

$$R_n(x) = |R_n(x)| \leqslant \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 |f^{(n)}(tx)||1-t|^{n-1}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

Conclusion : $\boxed{0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t}$

iii) D'après 2)b)i) avec $x = b$, on a $R_n(b) = \dfrac{b^n}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(tb)\,\mathrm{d}t$. D'où 2)b)ii) s'écrit $(b \neq 0)$:

$$\boxed{0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b)}$$

c) Soit $x \in [0,b[$. **Toujours** *citer les questions utilisées, précisément.*
D'après 2)a) la suite $(R_n(b))$ est convergente. De plus, par construction, $0 \leqslant \dfrac{x}{b} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x}{b}\right)^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x}{b}\right)^n R_n(b) = 0$.
Donc, par encadrement, 2)b)iii) entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.
La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour la fonction f sur l'intervalle $[0,x]$ (avec $x > 0$) s'écrit.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{n+1}(x)$$

Donc, en passant à la limite pour $n \to +\infty$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Puisque f est impaire, les $f^{(2n)}(0)$ sont nuls et l'égalité s'étend donc aux x dans $]-b,0[$ par imparité des deux membres de l'égalité.

Conclusion : $\boxed{\forall x \in]-b,b[,\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$

3) La fonction tan vérifie les conditions demandées pour f : elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x)) \geqslant 0$ puisque T_n est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et $\tan(x) \geqslant 0$.
Pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ on peut trouver un $b \in \left]x, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et le résultat du 2)c) s'applique. Avec $\tan^{(2n)}(0) = 0$ et en posant $t_n = \tan^{(2n+1)}(0)$ comme au I)6), on obtient

$$\boxed{\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t_k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}$$