Devoir de Mathématiques numéro 1

Exercice 1

Polynômes de Bernoulli

1) Définitions.

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

b) En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes réels $(B_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$B_0(X) = 1 \qquad \forall n \geqslant 1, \quad B_n' = nB_{n-1} \qquad \forall n \geqslant 1, \quad \int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

On appelle $(B_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Bernoulli. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $b_n = B_n(0)$. La suite de réels (b_n) est appelée suite des nombres de Bernoulli.

c) Expliciter $B_n(X)$ et b_n pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

2) Premières propriétés.

a) Quel est le degré de $B_n(X)$ pour $n \geqslant 0$?

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, on a $B_n(0) = B_n(1)$.

c) Prouver par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k$$

d) En déduire, pour $n \geqslant 1$, une expression de b_n en fonction de $b_0, \ldots, b_{n-1}$. Calculer b_5 et b_6.

e) Pour tout $n \geqslant 0$ on pose $C_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$. Montrer, en utilisant la définition des polynômes de Bernoulli, que pour tout $n \geqslant 0$ on a $C_n(X) = B_n(X)$.

f) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $b_{2n+1} = 0$ et que, pour tout $n \geqslant 0$, $B_{2n+1}(1/2) = 0$.

3) Étude des variations de B_n sur $[0, 1]$.

a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Établir que, si P est non nul et de signe constant sur $[0, 1]$, alors $\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$.

b) Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que B_{2n} vérifie

- $(-1)^n B_{2n}(0) < 0 \qquad (-1)^n B_{2n}(1) < 0 \qquad (-1)^n B_{2n}(1/2) > 0$
- la fonction $(-1)^n B_{2n}$ est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

et que B_{2n+1} vérifie

- $(-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}(1) = (-1)^n B_{2n+1}(1/2) = 0$
- il existe deux réels $\alpha_{2n+1} \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\beta_{2n+1} \in]\frac{1}{2}, 1[$ tels que la fonction $(-1)^n B_{2n+1}$ soit strictement décroissante sur $[0, \alpha_{2n+1}]$, puis strictement croissante sur $[\alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}]$, puis strictement décroissante sur $[\beta_{2n+1}, 1]$.

Indication : *Il pourra être judicieux d'aborder en même temps la récurrence sur ces quatre propriétés.*

c) En déduire que le signe du réel b_{2p} est $(-1)^{p+1}$ pour tout $p \geqslant 1$.

4) Une application arithmétique.

a) Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.

b) Soit $p \geqslant 1$ et $N \geqslant 0$ deux entiers. On pose $S_p(N) = \sum_{k=0}^{N} k^p$, montrer en utilisant la question précédente que

$$S_p(N) = \frac{B_{p+1}(N+1) - b_{p+1}}{p+1}$$

c) Calculer explicitement en fonction de N les sommes $S_p(N)$ pour $p = 1, 2, 3$.

Exercice 2

Partie 1

1) Quelle est la période de la fonction tan ?

2) Représenter la fonction tan sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

3) Démontrer l'existence d'une suite de polynômes (T_n) telle que :

- $T_0(X) = X$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)}$, dérivée n-ième de la fonction tan, vérifie : $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x))$

On explicitera une relation de récurrence vérifiée par les polynômes T_n et T_{n+1}.

4) Expliciter les polynômes T_1, T_2 et T_3.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les coefficients du polynôme T_n sont des entiers naturels. Quel est le degré du polynôme T_n ?

6) Justifier qu'il existe une unique suite de nombres entiers naturels (t_k) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \qquad \tan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t_k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} T_{2n+2}(\tan(t))\,\mathrm{d}t$$

On citera le théorème utilisé (au besoin en allant retrouver l'énoncé précis dans le cours de PTSI !).

Partie 2

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et symétrique par rapport à 0. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième et R_n la fonction définie pour $x \in I$ par :

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

On suppose que f est impaire et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$ tel que $x \geqslant 0$, $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

1) Soit $x \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité : $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x)$.

2) Soit $b \in I$ tel que $b > 0$.

a) Démontrer que la suite $(R_n(b))$ est convergente.

b) Soient $x \in [0, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier :

i) $R_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(tx)(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$

ii) $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$

iii) $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b)$.

c) En déduire que, pour tout $x \in]-b, b[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

3) Montrer que $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, \qquad \tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t_k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$.