Cours : Liste des questions de cours

$(\star)$ = niveau de difficulté ; **(c)** = classique, peut tomber tel quel
(m) = méthode à connaître **(ci)** = classique, peut tomber avec indications
(th) = théorème incontournable

1) **(cc)** Expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

2) **(m)** Soit A un anneau. Montrer que, si $x \in A$ est nilpotent, $1 - x$ est inversible.

3) $(\star\star)$ Démonstration du théorème de Cesàro.

4) **(cc)** Limite de la suite $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, avec $x \in \mathbb{R}$ (équivalent de $e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$).

5) **(c)** Nature de la série de Bertrand $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ selon $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour $\alpha \neq 1$.

6) $(\star)$ Soit I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I,\ f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

7) **(th)** Les dix DL usuels : famille exponentielle (exp, cos, sin), géométrique ($\dfrac{1}{1-x}$, $\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\operatorname{Arctan}(x)$), $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à l'ordre n ; $\tan(x)$ à l'ordre 3.

8) Limite en 0^+ de $x \mapsto \dfrac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$.

9) **(m)** Variations, limite et équivalent de la suite $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, \mathrm{d}t$.

10) **(ci)** Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$.

11) $(\star)$ Soit $\alpha \in]0,1[$. Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{k^\alpha}$ et équivalent des sommes partielles (exercice 24.1).

12) **(ci)** Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$.

13) **(th)** Énoncés des théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme (les *deux*).

14) **(c)** Pour tout $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ qui commutent, $g(\operatorname{Ker} f) \subset \operatorname{Ker} f$ et $g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Im} f$.

15) $(\star)$ Pour tout $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\quad \operatorname{Ker}(v \circ u) = \operatorname{Ker} u \iff \operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$

16) **(ci)** Centre de $\mathscr{L}(E)$: Les endomorphismes f qui commutent à tout endomorphisme sont les homothéties.

17) **(cc)** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $f^n(x) = 0$. Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ libre.

18) **(m)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f définie par $f(M) = -M + \operatorname{Tr}(M)A$. Montrer que f est un endomorphisme, et selon la valeur de $\operatorname{Tr} A$, déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

19) **(m)** $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}$. Pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

20) **(c)** Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \operatorname{Sp}(u) \Longrightarrow P(\lambda) \in \operatorname{Sp}(P(u))$.

21) **(th c)** Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$. $\operatorname{Tr}(A)$ est somme des valeurs propres (même complexes) de A avec multiplicité.

22) Suites récurrentes d'ordre p : comment se ramener à une suite récurrente d'ordre 1 dans $\mathbb{K}^p$. Solutions lorsque A possède p valeurs propres distinctes (sans preuve).

23) **(th)** Énoncer les CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit diagonalisable.

24) **(th)** Méthode pour déterminer l'équation de la tangente en un point régulier (équation paramétrique ; et équation cartésienne dans le cas plan $m = 2$)

25) Étude locale d'une courbe plane : les quatre situations possibles, selon la parité de p et q (avec 4 dessins). Définition de p et q (sans preuves).

26) **(th)** Plan d'étude d'une branche infinie.

27) Formules de Frenet : définition de $\overrightarrow{T}$, de $\overrightarrow{N}$, de α. Formules liant $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t}$ et $\gamma(t)$ (avec preuve).

28) **(mm)** Sur $E = \mathbb{R}[X]$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire.

29) **(c)** Sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \mathrm{Tr}\,(A^T B)$ est un produit scalaire.

30) **(c)** Liberté des familles orthogonales de vecteurs non nuls

31) **(ci)** Un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

32) **(ci)** Si $u \in \mathscr{L}(E)$, u est une symétrie orthogonale si et seulement si u est une symétrie et un endomorphisme orthogonal.

33) **(c)** Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont deux à deux orthogonaux.

34) **(c)** Énoncé et preuve du lemme d'Abel.

35) Rayon de convergence de la somme de deux séries entières, avec preuve.

36) **(m)** Rayon et somme de $\displaystyle\sum \frac{\mathrm{ch}\,(n)}{n} z^{2n}$, de $\sum c_n z^n$, où c_n est le nombre de chiffres de n en base 10.

37) L'application $(x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ n'a pas de limite en $(0, 0)$. L'application $(x, y) \mapsto \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ et $(0, 0) \mapsto 0$ est continue en $(0, 0)$.

38) **(m)** Points réguliers de $x(x^2 + y^2) - x^2 + y^2 = 0$. Équation de la tangente en $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

39) **(th)** Plan tangent en un point régulier d'une nappe paramétrée $(u, v) \mapsto \overrightarrow{F}(u, v)$, d'une surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$. Vecteur tangent à une courbe définie par deux équations cartésiennes.

40) Équation paramétrique du conoïde Σ : Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(0, 1, 1)$ et de rayon 1 contenu dans le plan $y = 1$. La surface Σ est l'union des droites passant par un point de $\mathscr{C}$ et son projeté sur (Oz).

41) Équation paramétrique d'une surface réglée donnée par ses génératrices, d'une surface de révolution autour de l'axe (Oz).

42) La loi de Poisson, définie sur les $\{k\}$ et étendue à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ par $\forall A \in \mathscr{A}\ P(A) = \displaystyle\sum_{k \in A} P(\{k\})$, définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

43) **(th)** Formule des probabilités totales, avec preuve.

44) **(cc)** Une grenouille pond X oeufs selon une loi de poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, chaque oeuf éclot de façon indépendante selon une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Loi du nombre Y d'oeufs éclot.

45) **(m)** (loi de couple) On effectue une suite de lancers indépendants avec une pièce non équilibrée (probabilité $p \in]0, 1[$ d'avoir pile). Donner la loi de la longueur X de la première chaîne, et Y de la deuxième chaîne.

46) Si X est une variable aléatoire discrète réelle, $V(X) = 0$ entraîne X constante presque sûrement (preuve : y compris le lemme).

47) **(th)** Séries génératrice d'une variable aléatoire discrète suivant une loi de géométrique, d'une variable aléatoire discrète suivant une loi Poisson. Avec preuve.