$\boxed{\text{Général : Questions de cours}}$

Les « ... » sont évidemment à détailler (au moins une étape de plus).

I) Intégration

Variations, limite et équivalent de la suite $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, \mathrm{d}t$. Savoir étudier une suite définie par une intégrale. Savoir obtenir un équivalent à partir d'un encadrement.

Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$. Pour $t \in [e, +\infty[$, posons $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$.

- <u>Théorème de comparaison</u>

  f est dérivable sur $[e, +\infty[$, et $f'(t) = -\dfrac{1}{t^2(\ln t)^\beta} + \dfrac{-\beta}{t^2(\ln t)^{\beta+1}} = -\dfrac{(\ln t) + \beta}{t^2(\ln t)^{\beta+1}}$

  Donc pour $t \in [e, +\infty[$ tel que $t > e^{-\beta}$, $f'(t) < 0$ et f décroissante.
  Ainsi f est positive, continue et décroissante (au delà de $e^{-\beta}$), donc on peut appliquer le théorème de comparaison séries / intégrales :

  $$\sum f(n) \text{ et } \int_e^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t \text{ sont de même nature.}$$

- <u>Nature de l'intégrale</u>

  Pour $\beta \neq 1$, $\displaystyle\int_e^x f(t) \, \mathrm{d}t = \left[\frac{(\ln t)^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_e^x = \frac{(\ln x)^{-\beta+1}}{-\beta+1} - \frac{1}{-\beta+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} -\dfrac{1}{-\beta+1} & \text{si } \beta > 1 \\ +\infty & \text{si } \beta < 1 \end{cases}$

  Pour $\beta = 1$, $\displaystyle\int_e^x f(t) \, \mathrm{d}t = [\ln(\ln(t))]_e^x = \ln(\ln x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

  Donc $\displaystyle\int_e^x f(t) \, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

- <u>Conclusion</u> : La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Soit $\alpha \in]0, 1[$. Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{k^\alpha}$ et équivalent des sommes partielles (exercice 24.1). À l'aide d'une comparaison série / intégrale, savoir obtenir des équivalents de restes ou de sommes partielles dans les séries.

Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$. Savoir étudier la convergence d'une fonction qui n'est pas intégrable.

II) Algèbre linéaire

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f définie par $f(M) = -M + \mathrm{Tr}\,(M)A$. Montrer que f est un endomorphisme, et selon la valeur de $\mathrm{Tr}\ A$, déterminer $\mathrm{Ker}\ f$ et $\mathrm{Im}\ f$.

1)
- $\forall M_1, M_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda M_1 + M_2) = ... = \lambda f(M_1) + f(M_2)$. Donc f est linéaire
- $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = \underbrace{-M}_{\in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\underbrace{\mathrm{Tr}\,(M)}_{\in\mathbb{R}}\, A}_{\in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

  Donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme}}$

2) Si $\mathrm{Tr}\ A \neq 1$.

- <u>Ker f</u> :

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Ker} f &\Longrightarrow f(M) = 0 \\ &\Longrightarrow -M + \operatorname{Tr}(M)A = 0 \\ &\Longrightarrow \operatorname{Tr}(-M + \operatorname{Tr}(M)A) = \operatorname{Tr}(0) = 0 \\ &\Longrightarrow -\operatorname{Tr}(M) + \operatorname{Tr}(M)\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(M)(\underbrace{-1 + \operatorname{Tr}(A)}_{\neq 0}) = 0 \\ &\Longrightarrow \operatorname{Tr}(M) = 0 \end{aligned}$$

  Or $f(M) = 0$: $-M + \operatorname{Tr}(M)A = -M = 0$. Donc $M = 0$.
  Donc $\operatorname{Ker} f \subset \{0\}$.
  De plus $\{0\} \subset \operatorname{Ker} f$ (sous-espace vectoriel). Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \{0\}}$$

- <u>Im f</u> : f est un *endomorphisme* injectif *en dimension finie* donc f est bijectif et surjectif :

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$

3) Si $\operatorname{Tr} A = 1$.

- <u>Ker f</u> : Montrons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(A)$.

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Ker} f &\Longrightarrow f(M) = 0 \\ &\Longrightarrow -M + \operatorname{Tr}(M)A = 0 \\ &\Longrightarrow M = \operatorname{Tr}(M)A \in \operatorname{Vect}(A) \end{aligned}$$

  Donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Vect}(A)$.
  Réciproquement,

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Vect}(A) &\Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad M = \lambda A \\ &\Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(M) = f(\lambda A) = \lambda f(A) = \lambda(-A + \underbrace{\operatorname{Tr}(A)}_{=1} A) = 0 \\ &\Longrightarrow M \in \operatorname{Ker} f \end{aligned}$$

  Donc $\operatorname{Vect}(A) \subset \operatorname{Ker} f$. Conclusion :

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(A)}$$

- <u>Im f</u> :
  - Montrons que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$.

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Im} f &\Longrightarrow \exists N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad M = f(N) \\ &\Longrightarrow \exists N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \operatorname{Tr}(M) = \operatorname{Tr}(-N + \operatorname{Tr}(A)N) = 0 \\ &\Longrightarrow M \in \operatorname{Ker} \operatorname{Tr} \end{aligned}$$

    Donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$.
  - Le théorème du rang pour f s'écrit $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \dim(\operatorname{Ker} f) = n^2 - 1$.
    Comme $\operatorname{Tr} \neq 0$ est une forme linéaire non nulle, $\dim(\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \dim(\operatorname{Im} \operatorname{Tr}) = n^2 - 1$.
  - D'après ci-dessus, $\begin{cases} \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} \operatorname{Tr} \\ \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}) \end{cases}$ donc

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}}$$

Pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$. Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $AB = C = (c_{ij})$: $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. $\mathrm{Tr}\,(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$.
- Soit $BA = D = (d_{ij})$: $d_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$. $\mathrm{Tr}\,(BA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki}$.

$$\mathrm{Tr}\,(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{ik} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \mathrm{Tr}\,(BA)$$

commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$ — changement de variable $k, i = i, k$ — changement d'ordre de sommation

CNS pour qu'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ soit diagonalisable. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Sp}\,(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ les sous-espaces-propres associés.

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable } &\overset{\text{déf}}{\iff} \text{Il existe une base } \mathscr{B}' \text{ telle que sa matrice } D = \mathrm{Mat}\,(u, \mathscr{B}', \mathscr{B}') \text{ soit diagonale} \\ &\iff E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k} \\ &\iff \begin{cases} \chi_u \text{ scindé} \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)\ \alpha = \dim E_\lambda \end{cases} \end{aligned}$$

III) Géométrie et calcul différentiel

Points réguliers de $x(x^2+y^2) - x^2 + y^2 = 0$. Équation de la tangente en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$. Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation cartésienne $x(x^2+y^2) - x^2 + y^2 = 0$.

- Points réguliers : Soit $M(x, y) \in \mathscr{C}$.

  M est régulier si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$. Or

  $$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f(x, y) = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} 3x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \iff \dots \iff (x, y) = (0, 0) \quad \text{ou} \quad (x, y) = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

  Mais $f(2/3, 0) \neq 0$ donc $\boxed{\text{Le seul point de } \mathscr{C} \text{ qui n'est pas régulier est } O(0,0).}$

- $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = 0$ donc $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \in \mathscr{C}$.

  $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \cdots = \begin{pmatrix} -1/6 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la tangente. D'où

  $$P(X, Y) \in T_{\mathscr{C},M} \iff \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f = \begin{pmatrix} X - 1/2 \\ Y - \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/6 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = 0 \iff \boxed{-\frac{1}{6}\left(X - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(Y - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = 0}$$

  (sans garantie pour les calculs : refaites les)

Plan tangent en un point régulier d'une nappe paramétrée, d'une surface définie par une équation cartésienne. Vecteur tangent à une courbe définie par deux équations cartésiennes.

- Plan tangent en un point régulier d'une nappe paramétrée :

  Soit $(u, v) \mapsto \overrightarrow{F}(u, v)$ un paramétrage de la surface Σ.

En un point régulier M de paramètres (u,v), le plan tangent est le plan passant par M et de vecteurs directeurs $\left(\dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u,v)\right)$ (libre car M régulier).

$$\boxed{P(X,Y,Z) \in T_{\Sigma,M} \iff \det\left(\overrightarrow{MP}, \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u,v)\right) = 0}$$

En posant $\overrightarrow{n} = \dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u,v)$ un vecteur normal à $T_{\Sigma,M}$, on a aussi

$$P(X,Y,Z) \in T_{\Sigma,M} \iff \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{n} = 0$$

- Plan tangent en un point régulier d'une surface définie par une équation cartésienne :
  Soit $f(x,y,z) = 0$ une équation cartésienne de Σ.
  En un point régulier $M(x,y,z)$, le plan tangent est le plan passant par M et de vecteur normal $\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x,y,z)$.
  $$\boxed{P(X,Y,Z) \in T_{\Sigma,M} \iff \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x,y,z) = 0}$$
- Vecteur tangent à une courbe définie par deux équations cartésiennes.
  Soit Σ et Σ' deux surfaces définies par $f(x,y,z) = 0$ et $g(x,y,z) = 0$.
  On suppose qu'au point $M(x,y,z) \in \Sigma \cap \Sigma'$, $T_{\Sigma,M} \neq T_{\Sigma',M}$, et donc que $\mathscr{C} = \Sigma \cap \Sigma'$ est localement une courbe.
  Comme $T_{\Sigma,M} \neq T_{\Sigma',M}$, $\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x,y,z)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\ g(x,y,z)$ ne sont pas colinéaires :
  $$\boxed{\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\text{grad}}\ f(x,y,z) \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\ g(x,y,z) \neq \overrightarrow{0}}$$
  De plus $\overrightarrow{u}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x,y,z)$ et donc dans le plan (vectoriel) tangent à Σ en M. De même $\overrightarrow{u}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{\text{grad}}\ g(x,y,z)$ donc dans le plan (vectoriel) tangent à Σ' en M.
  Donc $\boxed{\overrightarrow{u} \text{ est un vecteur directeur de } T_{\mathscr{C},M} = T_{\Sigma,M} \cap T_{\Sigma',M}}$

IV) Probabilités

Grenouille. Soit X le nombre d'oeufs pondu par la grenouille, et Y le nombre d'oeufs éclot.
Comme $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Comme chaque oeuf éclot avec une loi $\mathscr{B}(p)$ indépendante, k oeufs sachant qu'il y en a n pondus éclosent selon une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(Y = k \mid X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

La formule des probabilités totales nous donne, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X=n, Y=k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X=n)P(Y=k \mid X=n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{(n-k)!}(1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda}\frac{p^k\lambda^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}(1-p)^n \qquad \text{or} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Big(\lambda(1-p)\Big)^n}{n!} = e^{\lambda(1-p)} \\
&= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Donc $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda p)$.