Épreuve de Mathématiques 9

Correction

Exercice 1 (ESCP Europe 2015)

1) a) $\det(M) = -1 + 1 = 0$ donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$

b) Comme $M^2 = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$M^{k+2} = M^k M^2 = M^k \times 0 = 0$$

Ainsi, $\boxed{\forall n \geqslant 2, M^n = 0}$

2) a) $\det M = a - a = 0$ donc $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$

b) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad M^n = (1+a)^{n-1} M$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $M^1 = (1+a)^0 M$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Comme $M^2 = \begin{pmatrix} 1+a & (1+a)a \\ 1+a & (1+a)a \end{pmatrix} = (1+a)M$, il vient

$$M^{n+1} = (1+a)^{n-1} M^2 = (1+a)^n M$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad M^n = (1+a)^{n-1} M}$

3) $\det M = b - a$.
Ainsi, $a = b$ entraîne $\det M = 0$ et M non inversible.
Réciproquement, si M est non inversible, alors $\det M = b - a = 0$ et donc $a = b$.
Conclusion : $\boxed{M \text{ est inversible si et seulement si } a \neq b}$

4) a) La famille des évènements $(X = k)_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'évènements.
De plus, $(X = k) \cap (X = Y) = (X = k) \cap (Y = k)$. Donc la formule des probabilités totales s'écrit

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P(Y = k | X = k)$$

Or X et Y sont indépendantes, donc $P(Y = k | X = k) = P(Y = k)$. En conclusion,

$$\boxed{P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) P(Y = k)}$$

b) $p \in]0,1[$ donc $q^2 \in]0,1[$ et la série géométrique $\sum q^{2n}$ converge :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} = \frac{1}{1-q^2}$$

Or $p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$. Conclusion : $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{1-q}{1+q}}$

c) Comme $A = (\det M \neq 0)$ et $\det M = Y - X$, il vient

$$\overline{A} = (X = Y)$$

Or, d'après a), $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k|Y = k)$.

De plus, $P(X = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1}$ et $P(Y = k) = pq^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par définition de X et Y.

Donc $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \frac{1-q}{1+q}$ d'après b).

Ainsi, $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(X = Y) = 1 - \frac{1-q}{1+q}$

Conclusion : $\boxed{P(A) = \frac{2q}{1+q}}$

5) **a)** Formule du binôme :

$$\boxed{(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k} \quad \text{et} \quad \boxed{(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k}$$

b) En suivant l'indication de l'énoncé, il vient, d'après a),

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k &= \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{j} x^{i+j} \\
&= \sum_{m=0}^{2n}\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k}\binom{n}{m-k} x^m
\end{aligned}$$

Pour $m = n$, on trouve

$$\boxed{\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}$$

c) De même qu'au 4)a), la formule des probabilités totales s'écrit

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)P(Y = k)$$

Or $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ car $p = 1 - p = \frac{1}{2}$, et de même pour Y. Ainsi,

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 = \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

D'après c), car $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Conclusion $\boxed{P(X=Y) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$

d) De même qu'au 4), $\boxed{P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(X=Y) = 1 - \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}$

Exercice 2 (PT A 2010, partiel— corrigé UPS)

Partie 1 (Questions préliminaires)

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tous $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_A(\lambda.M+N) &= A(\lambda.M+N) \\
&= \lambda.AM + AN \quad \text{(distributivité dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\
&= \lambda.\varphi_A(M) + \varphi_A(N) \\
\tau_A(\lambda.M+N) &= \mathrm{Tr}\,\left(A(\lambda.M+N)\right) \\
&= \mathrm{Tr}\,\left(\lambda.AM + AN\right) \quad \text{(distributivité dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\
&= \lambda.\,\mathrm{Tr}\,(AM) + \mathrm{Tr}\,(AN) \quad \text{(linéarité de l'application trace)} \\
&= \lambda.\tau_A(M) + \tau_A(N) \\
\gamma_A(\lambda.M+N) &= A(\lambda.M+N) - (\lambda.M+N)A \\
&= \lambda.AM + AN - (\lambda.MA + NA) \quad \text{(distributivité à gauche et à droite dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\
&= \lambda.(AM - MA) + (AN - NA) \\
&= \lambda.\gamma_A(M) + \gamma_A(N).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{les applications } \varphi_A,\ \tau_A \text{ et } \gamma_A \text{ sont linéaires.}}$

2) Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de dimension } n^2.}$

Si E et F sont deux espaces vectoriels, sur un même corps K, de dimensions finies alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension $\dim E \times \dim F$. En particulier, on en déduit que $\mathcal{L}(E,K)$ est de dimension $\dim E$ donc : $\boxed{\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* = n^2}$.

3) Si E est un espace vectoriel de dimension finie n et si $(e_1,\ldots,e_k)$ est une famille libre de E alors il existe des vecteurs $e_{k+1},\ldots,e_n$ de E tels que $(e_1,\ldots,e_k,e_{k+1},\ldots,e_n)$ soit une base de E.

Partie 2 (Un exemple)

1) La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux : 1 et 2.

Puisque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distinctes, $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

2) Le polynôme caractéristique de la matrice B est $(X-1)^2(X-2)^2$.

On en déduit que les valeurs propres sont 1 et 2 et les sous-espaces propres correspondants sont de dimension au plus 2.

Tout d'abord, on remarque :

$$\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&3\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&3\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

donc $(1,0,0,0)$ et $(0,1,0,0)$ sont deux vecteurs du sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. De plus ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels donc forment une famille libre et on a vu que E_1 est de dimension au plus 2 donc :

$$E_1 = \mathrm{Vect}\,\left((1,0,0,0),(0,1,0,0)\right).$$

D'autre part, soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, on note E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 alors :

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t)\in E_2 &\iff \begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&3\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\y\\z\\t\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}t\\y\\z\\t\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases}x+3z=2x\\y+3t=2y\\2z=2z\\2t=2t\end{cases}\\
&\iff x=3z \text{ et } y=3t\\
&\iff (x,y,z,t)=(3z,3t,z,t)\\
&\iff (x,y,z,t)=z.(3,0,1,0)+t.(0,3,0,1)\\
&\iff (x,y,z,t)\in \text{Vect }\big((3,0,1,0),(0,3,0,1)\big).
\end{aligned}$$

De plus, les vecteurs $(3,0,1,0)$ et $(0,3,0,1)$ ne sont pas proportionnels donc forment une famille libre donc ils forment une base de :

$$E_2=\text{Vect }\big((3,0,1,0),(0,3,0,1)\big).$$

Les calculs précédents montrent que E_1 et E_2 sont tous deux de dimension 2 ce qui correspond à la multiplicité de la valeur propre correspondante donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable}}$ est une base de vecteurs propres est constituée par les vecteurs :

$$\boxed{(1,0,0,0)\ ,\ (0,1,0,0)\ ,(3,0,1,0) \text{ et } (0,3,0,1).}$$

3) **a)** On a :

$$\begin{aligned}
M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\iff \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\ /\ M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\\
&\iff \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\ /\ M=a.\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c.\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+d.\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\\
&\iff \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\ /\ M=a.E_{11}+b.E_{12}+cE_{21}+d.E_{22}\\
&\iff M\in\text{Vect}\,(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\mathcal{E}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ or cette famille contient 4 éléments et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4 donc cette famille génératrice est également libre donc c'est $\boxed{\text{une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

b) On a :

- $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\varphi_A(E_{11})=E_{11}}$.
- $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\varphi_A(E_{12})=E_{12}}$.
- $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\2&0\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\varphi_A(E_{21})=3E_{11}+2E_{21}}$.
- $\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\0&2\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\varphi_A(E_{22})=3E_{12}+2E_{22}}$.

c) Les relations précédentes montrent que $\boxed{B \text{ est la matrice de } \varphi_A \text{ dans la base } \mathcal{E}.}$

d) D'après les questions I.2 et I.3.c, $\boxed{\varphi_A \text{ est diagonalisable.}}$
Une base de vecteurs propres de B est constituée par les vecteurs :

$$(1,0,0,0)\ ,\ (0,1,0,0)\ ,(3,0,1,0) \text{ et } (0,3,0,1)$$

donc une base de vecteurs propres de φ_A est constituée par les matrices :

$$\boxed{E_{11}\ ,\ E_{12}\ ,\ 3E_{11}+E_{12} \text{ et } 3E_{12}+E_{22}.}$$

Partie 3 (Réduction de l'endomorphisme φ_A)

1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\varphi_A(M) = \lambda M$ ce qui signifie $AM = \lambda M$ puis $(A - \lambda I_n)M = 0_n$.
Si la matrice $A - \lambda I_n$ était inversible alors on en déduirait :

$$(A-\lambda I_n)^{-1}(A-\lambda I_n)M = 0_n \quad \text{donc} \quad M = 0_n$$

ce qui contredit l'hypothèse M non nulle.
Donc $\boxed{\text{la matrice } A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible.}}$

2) Si λ est une valeur propre de φ_A alors il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\varphi_A(M) = \lambda M$.
D'après la question précédente, on en déduit que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible donc que $\boxed{\lambda \text{ est une valeur propre de } A.}$

3) Supposons que M soit la matrice dont la k^{e} colonne est X et toutes les autres sont nulles, on note $C_1, \ldots, C_n$ lesdites colonnes alors les colonnes de la matrice AM sont $AC_1, \ldots, AC_n$.
Si $i \neq k$ alors le produit AC_i est la colonne nulle.
Sinon, on a $AC_k = AX$ donc $AC_k = \mu X$.
Donc AM est la matrice dont la k^{e} colonne est μX et toutes les autres sont nulles donc $AM = \mu M$.
On a $\varphi_A(M) = \mu M$ et M est non nulle (puisque X est non nulle) donc $\boxed{M \text{ est un vecteur propre de } \varphi_A.}$

4) D'après la question II.2, une valeur propre de φ_A est une valeur propre de A.
D'après la question II.3, une valeur propre de A est une valeur propre de φ_A.
On en déduit que $\boxed{\text{les valeurs propres de } \varphi_A \text{ sont celles de } A.}$

5) On suppose A diagonalisable alors A admet une base de vecteurs propres correspondant à des vecteurs colonnes $X_1, \ldots, X_n$.
Pour tous $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,n]\!]$, on note $M_{i,j}$ la matrice dont la j^{e} colonne est X_i et dont toutes autres colonnes sont nulles.
D'après la question II.3, les matrices $M_{i,j}$ sont des vecteurs propres de φ_A.
De plus, considérons une combinaison linéaire nulle des matrices précédentes :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} M_{i,j} = 0_n.$$

En considérant la j^{e} colonne, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i = 0_{n,1}$$

or $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\lambda_{1,j}, \ldots, \lambda_{n,j}$ sont tous nuls.
Puisque j est quelconque entre 1 et n, on en déduit que tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls *i.e.* la famille des matrices $M_{i,j}$ est libre or elle contient n^2 vecteurs ce qui correspond à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Ainsi, φ_A admet une base de vecteurs propres donc $\boxed{\varphi_A \text{ est diagonalisable.}}$

Partie 4 (Une caractérisation des matrices nilpotentes)

1) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre colonne associé.
Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(k)$: « $A^k X = \lambda^k X$ » dépendant de $k \in \mathbb{N}^*$.

- Par choix de X, on a $AX = \lambda X$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
  Puisque $\mathcal{P}(k)$ est supposée vraie par hypothèse de récurrence, on a $A^k X = \lambda^k X$.
  Alors :
  $$\begin{aligned} A^{k+1}X &= A^k(AX) \\ &= A^k(\lambda X) \\ &= \lambda A^k X \\ &= \lambda\lambda^k X \\ &= \lambda^{k+1}X \end{aligned}$$
  donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
- On a $\mathcal{P}(1)$ vraie et : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \big(\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)\big)$.
  D'après le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
  En particulier, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \lambda^k \text{ est une valeur propre de } A^k.}$

2) **a)** Puisque A est nilpotente, il existe un entier $p \geq 1$ tel que A^p soit la matrice nulle.
Si λ est une valeur propre de A alors, d'après la question précédente, λ^p est une valeur propre de A^p qui est la matrice nulle donc $\lambda^p = 0$.
On en déduit que $\lambda = 0$ *i.e.* $\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre de } A}$.

b) Trigonalisons A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: puisque 0 est la seule valeur propre de A, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$.
En particulier on a $\mathrm{Tr}\,(P^{-1}AP) = 0$ mais :
$$\mathrm{Tr}\,(P^{-1}(AP)) = \mathrm{Tr}\,((AP)P^{-1}) \ \text{ donc } \boxed{\mathrm{Tr}\,(A) = 0}.$$

3) **a)** Puisque $AM = MA$, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (AM)^k = A^k M^k$.
Puisque A est nilpotente, il existe un entier $p \geq 1$ tel que A^p soit la matrice nulle, on a donc :
$$(AM)^p = 0_n \times M^p = 0_n$$
donc $\boxed{AM \text{ est nilpotente.}}$

b) Soit $M \in \mathrm{Ker}\,(\gamma_A)$ *i.e.* $AM - MA$ est la matrice nulle.
D'après la question précédente, on en déduit que la matrice AM est nilpotente.
D'après la question IV.2.b, on en déduit que AM est de trace nulle *i.e.* $\tau_A(M) = 0$.
Ainsi, pour tout $M \in \mathrm{Ker}\,(\gamma_A)$, on a $M \in \mathrm{Ker}\,(\tau_A)$ *i.e.* $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\gamma_A) \subset \mathrm{Ker}\,(\tau_A)}$.

c) **i)** $UE_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & u_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ où la colonne non nulle est la j-ème.
Donc $\mathrm{Tr}\ UE_{ij} = u_{ji}$.

ii) Soit $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(\lambda.U + V)(M) &= \tau_{\lambda.U+V}(M) \\ &= \mathrm{Tr}\,\big((\lambda.U + V)M\big) \\ &= \lambda\,\mathrm{Tr}\,(UM) + \mathrm{Tr}\,(VM) \\ &= \lambda\tau_U(M) + \tau_V(M) \\ &= \lambda f(U)(M) + f(V)(M) \end{aligned}$$

ce qui montre que $f(\lambda.U+V)=\lambda f(U)+f(V)$ *i.e.* f est linéaire.
Considérons $U \in \mathrm{Ker}\,(f)$ alors :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \tau_U(M)=0 \quad i.e. \quad \mathrm{Tr}\,(UM)=0.$$

En particulier pour $M=E_{ij}$, d'après i), $\mathrm{Tr}\,(UM)=u_{ij}=0$. Cette égalité étant valable pour tout i, j, la matrice U est nulle donc f est injectif.
Ainsi, f est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriel de même dimension finie (partie 1) donc $\boxed{f \text{ est un isomorphisme}}$ ce qui donne :

$$\boxed{\forall \varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*,\ \exists ! U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ \varphi=\tau_U}$$

c'est-à-dire :

iii) D'après la question IV.3.b, il existe $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\mathbb{R})$ telle que $\tau_A=\varphi\circ\gamma_A$.
Mais d'après la question précédente, il existe une (unique) matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi=\tau_B$.
Finalement, on a montré l'existence (et l'unicité) de $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\boxed{\tau_A=\tau_B\circ\gamma_A}$.

d) La relation précédente donne :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}\,(AM)=\mathrm{Tr}\,\big(B(AM-MA)\big)$$

d'où en utilisant les propriétés de l'application Tr :

$$\begin{aligned}\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}\,(AM) &= \mathrm{Tr}\,(BAM-BMA)\\ &= \mathrm{Tr}\,(BAM)-\mathrm{Tr}\,(BMA)\\ &= \mathrm{Tr}\,(BAM)-\mathrm{Tr}\,(ABM)\\ &= \mathrm{Tr}\,\big((BA-AB)M\big)\end{aligned}$$

ce qui montre que les deux formes linéaires suivantes sont égales :

$$M \mapsto \mathrm{Tr}\,(AM) \ \text{ et } \ M \mapsto \mathrm{Tr}\,\big((BA-AB)M\big)$$

D'après l'unicité de la matrice U dans le résultat de la question IV.3.c.ii., on en déduit que : $\boxed{A=BA-AB}$.

4) a) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{Q}(k)$: « $BA^k-A^kB=kA^k$ » dépendant de $k \in \mathbb{N}^*$.

- Par hypothèse, on a $BA-AB=A$ donc $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{Q}(k)$ soit vraie, montrons que $\mathcal{Q}(k+1)$ est vraie.
  Puisque $\mathcal{Q}(k)$ est supposée vraie par hypothèse de récurrence, on a $BA^k-A^kB=kA^k$.
  Alors :

$$\begin{aligned}A^{k+1} &= AA^k\\ &= (BA-AB).A^k\\ &= BA^{k+1}-A(BA^k)\\ &= BA^{k+1}-A(kA^k+A^kB)\\ &= BA^{k+1}-kA^{k+1}-A^{k+1}B\end{aligned}$$

  d'où $(k+1)A^{k+1}=BA^{k+1}-A^{k+1}B$ et $\mathcal{Q}(k+1)$ est vraie.
- On a $\mathcal{Q}(1)$ vraie et : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \big(\mathcal{Q}(k)\Rightarrow\mathcal{Q}(k+1)\big)$.
  D'après le théorème de récurrence, $\mathcal{Q}(k)$ est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
  On a donc : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, BA^k-A^kB=kA^k.}$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, la relation précédente s'écrit : $\gamma_B(A^k) = kA^k$.

Ainsi : $\boxed{\text{si } A^k \text{ est non nulle alors } A^k \text{ est un vecteur propre de } \gamma_B \text{ associé à la valeur propre } k.}$

c) Supposons A non nilpotente alors A^k est non nulle pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

D'après les deux question précédentes, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A^k est un vecteur propre de γ_B associé à la valeur propre k.

En particulier, γ_B admet une infinité de valeurs propres distinctes ce qui n'est pas possible pour un endomorphisme en dimension finie.

Donc $\boxed{A \text{ est nilpotente.}}$

5) D'après 4.3.d) (sens direct) et 4.4.c) (réciproque), nous avons montré

$$\boxed{A \text{ nilpotente si et seulement si il existe } B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } A = BA - AB.}$$

FIN DE L'ÉPREUVE