 Vendredi 8 avril 2016

Épreuve de Mathématiques 9

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (ESCP Europe 2015)

Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, soit M la matrice carrée d'ordre 2 définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$.

1) Dans cette question on choisit $a = b = -1$.

- **a)** La matrice M est-elle inversible ?
- **b)** Calculer pour tout entier $n \geqslant 2$ la matrice M^n.

2) Dans cette question, on choisit $a = b$.

- **a)** La matrice M est-elle inversible ?
- **b)** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $M^n = (1 + a)^{n-1} M$.

3) On revient au cas général où a et b sont des réels quelconques. Montrer que la matrice M est inversible si et seulement si $a \neq b$.

4) Dans cette question, on considère deux variables aléatoires discrètes X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

Soit N la matrice aléatoire définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et A l'évènement « la matrice N est inversible ».

- **a)** Établir la relation $P(X = Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k)$.
- **b)** Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$.
- **c)** En déduire $P(A)$ en fonction de q.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question on considère deux variables aléatoires discrètes X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.

Soit N la matrice aléatoire définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et A l'évènement « la matrice N est inversible ».

- **a)** Pour x réel, écrire les développements de $(x + 1)^n$ et $(x + 1)^{2n}$.
- **b)** En utilisant l'identité $(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n$, montrer que l'on a $\dbinom{2n}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k}\dbinom{n}{n-k}$.
- **c)** En déduire que $P(X = Y) = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.
- **d)** Calculer $P(A)$ en fonction de n.

Exercice 2 (PT A 2010, partiel)

Le problème se compose de quatre parties. Les trois premières sont totalement indépendantes entre elles. La quatrième utilise les résultats des parties précédentes mais peut se traiter en admettant ces résultats.
Si A est une matrice, on note ${}^tA$ sa transposée. $\mathrm{Tr}\,(A =)$ désigne la trace de A.
On identifie dans tout ce problème $\mathbb{R}^n$ avec l'ensemble des matrices colonnes à n lignes.
On note E^* l'espace $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ des formes linéaires sur E. Par exemple $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$ sera l'ensemble des applications linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
Dans tout le problème, pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on considère les applications suivantes :

$$\varphi_A : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}, \qquad \tau_A : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \mathrm{Tr}\,(AM) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \gamma_A : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$$

Partie 1 (Questions préliminaires)

1) Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, les applications φ_A, τ_A et γ_A sont linéaires.

2) Donner la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et celle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$.

3) Énoncer le théorème de la base incomplète.

Partie 2 (Un exemple)

Dans cette partie, et dans cette partie seulement, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2) La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser une base de vecteurs propres.

3) On pose :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que la famille $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Calculer $\varphi_A(E_{ij})$ pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant 2$. Donner la matrice de φ_A dans la base $\mathscr{B}$.

c) L'endomorphisme φ_A est-il diagonalisable ? Si oui, préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres de φ_A (on rappelle qu'ici un vecteur propre sera une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$).

Partie 3 (Réduction de l'endomorphisme φ_A)

On se fixe désormais $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $\varphi_A(M) = \lambda M$.
Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

2) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de φ_A, c'est également une valeur propre de A.

3) Soit μ une valeur propre de A, X un vecteur colonne non nul tel que $AX = \mu X$. Soit M une matrice dont une colonne est égale à X et toutes les autres colonnes sont nulles.
Montrer que M est un vecteur propre de φ_A.

4) Donner l'ensemble des valeurs propres de φ_A.

5) Montrer que si A est diagonalisable, φ_A l'est également (on pourra, à partir d'une base de vecteurs propres de A, construire une base de vecteurs propres de φ_A).

Partie 4 (Une caractérisation des matrices nilpotentes)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $A^p = 0$.

1) Montrer que si λ est une valeur propre (éventuellement complexe) de A, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, λ^k est une valeur propre de A^k.

2) On suppose A nilpotente.

a) Montrer que la seule valeur propre de A est 0.

b) Montrer que $\mathrm{Tr}\ A = 0$.

3) On suppose toujours A nilpotente.

a) Soit M une matrice telle que $AM = MA$. Montrer que la matrice AM est encore nilpotente.

b) En déduire que $\text{Ker } \gamma_A \subset \text{Ker } \tau_A$.
On admettra [1] qu'il existe alors $w : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $\tau_A = w \circ \gamma_A$.

c) **i)** Si $E_{ij} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice ayant un 1 en i-ème ligne, j-ème colonne, et 0 ailleurs, et $U = (u_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, calculer le produit UE_{ij} puis $\text{Tr}\,(UE_{ij})$.

ii) Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^* \\ U & \mapsto & \tau_U \end{array}$ est linéaire et injective.
En déduire que f est un isomorphisme.

iii) En déduire qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\tau_A = \tau_B \circ \gamma_A$.

d) Montrer que $A = BA - AB$.

4) On suppose maintenant qu'il existe une matrice B telle que $A = BA - AB$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $BA^k - A^kB = kA^k$.

b) À quelle condition la matrice A^k est-elle un vecteur propre de γ_B ?

c) En déduire que A est nilpotente.

5) Quelle caractérisation des matrices nilpotentes a-t-on obtenue ?

FIN DE L'ÉPREUVE

1. Ce théorème de factorisation, présent dans le sujet d'origine, est l'exercice 17 de la feuille d'algèbre linéaire.