Épreuve de Mathématiques 8

Correction

Exercice 1 (E3A MP 2014)

Exercice 2 (E3A MP 2012)

1) Il faut évidemment faire un dessin.

a) $[OB]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$ et $N_t \in \mathscr{C}$ donc $\boxed{\text{Le triangle } ON_tB \text{ est rectangle en } N_t.}$

b) $\mathscr{C}$ est le cercle de centre le milieu de $[OB]$ et de rayon $OB/2$, c'est à dire de centre de coordonnées $(0, 1/2)$ et de rayon $1/2$:

$$\boxed{\mathscr{C}: \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}} \qquad (\iff x^2 + y^2 - y = 0)$$

Équation de $\mathscr{D}'$: $\boxed{y = 1}$

c) L'équation de la droite (OM_t) est $x = ty$, donc en remplaçant dans l'équation de $\mathscr{C}$ il vient :

$$t^2y^2 + y^2 + y = 0$$

Or N_t est distinct du point O : si $y = 0$, $x = ty = 0$ et $N_t = O$, donc $y \neq 0$. On peut donc simplifier par y, et il vient $y = \dfrac{1}{1+t^2}$ puis $x = ty = \dfrac{t}{1+t^2}$.

Ainsi, $\boxed{\text{le point } N_t \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)}$

d) $\overrightarrow{N_tM_t} : \begin{pmatrix} t - \dfrac{t}{1+t^2} \\ 1 - \dfrac{1}{1+t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{t^3}{1+t^2} \\ \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{pmatrix}$

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ non nul, on note P_t le point tel que $\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{N_tM_t}$. On pose $P_0 = O$.

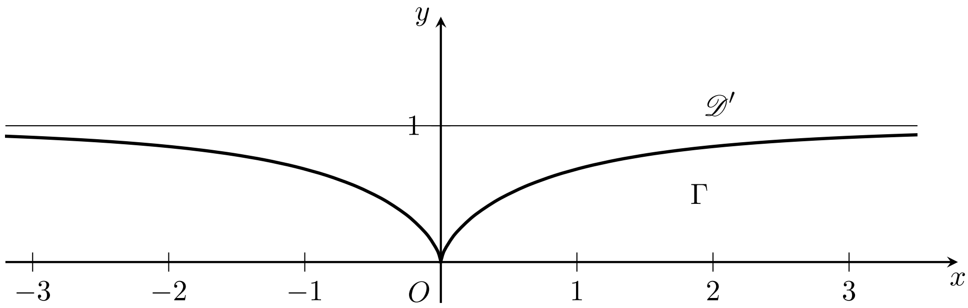
a) Le point P_t a pour coordonnées $\left(\dfrac{t^3}{1+t^2}, \dfrac{t^2}{1+t^2}\right)$.

Les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont respectivement impaires et paires, donc la courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe (Oy) et il suffit d'étudier x et y sur $[0, +\infty[$.

Ce sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ et, après calcul et étude du signe des dérivée, on trouve que x et y sont strictement croissante. *Sur votre copie, mettre au moins l'expression des dérivées (ou un argument pour justifier la croissance) et le tableau de variation.*

De plus, $\lim\limits_{+\infty} y = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} x = +\infty$ donc Γ admet $y = 1$ pour asymptote.

Il faut aussi justifier l'allure en $t = 0$, soit par une étude de la pente de (OP_t) lorsque $t \to 0$, soit par l'étude classique du point singulier (demandée à la question 2)b)).



b) En 0, $x \sim t^3$ et $y \sim t^2$ donc $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t^3 + o(t^3)$ et le point P_0 est un point de rebroussement de première espèce dont la tangente est l'axe (Oy).
On peut aussi se contenter de trouver $p = 2$ et une tangente verticale. Par symétrie, on a l'allure de la courbe au voisinage de $t = 0$ et le point est donc un point de rebroussement de première espèce.

3) **a)** Le produit scalaire s'écrit $xx' + yy' = \Re(z\bar{z}')$. Donc

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = \Re\left(z\frac{1}{\overline{\bar{z}}}\right) = 1$$

b) Si $z = x(t) + iy(t) = \dfrac{(t+i)t^2}{1+t^2}$, alors $\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{1+t^2}{(t-i)t^2} = \dfrac{(1+t^2)(t+i)}{(1+t^2)t^2} = \dfrac{1}{t} + i\dfrac{1}{t^2}$.

Ainsi, $\boxed{U_t\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}\right)}$

c) Lorsque t parcourt $\mathbb{R}^*$, U_t parcourt la parabole d'équation $y = x^2$ privée du point O. Donc
$\boxed{\text{L'image par } \sigma \text{ de la courbe } \Gamma \text{ est la parabole d'équation } y = x^2 \text{ privée de } O.}$

Exercice 3 (PT 2014, A)

1) Question de cours, donc tout le monde a su faire.

2) Idem.

a) $p(\overrightarrow{u}) = p(\overrightarrow{x}) + \lambda p(\overrightarrow{y})$ or $p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}$ car $\overrightarrow{x} \in \operatorname{Im} p$ et $p(\overrightarrow{y}) = 0$ car $\overrightarrow{y} \in \operatorname{Ker} p$. D'où $\|p(\overrightarrow{u})\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2$
De plus, $\|\overrightarrow{u}\|^2 =< \overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y} >= \lambda^2\|\overrightarrow{y}\|^2 + 2\lambda < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > + \|\overrightarrow{x}\|^2$
Donc l'inégalité s'écrit

$$\|\overrightarrow{x}\|^2 \leqslant \lambda^2\|\overrightarrow{y}\|^2 + 2\lambda < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > + \|\overrightarrow{x}\|^2$$

En simplifiant par $\|\overrightarrow{x}\|^2$ il vient

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda^2\|\overrightarrow{y}\|^2 + 2\lambda < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > \geqslant 0}$$

Si $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > \neq 0$, alors $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0}$ et l'expression ci-dessus change de signe en $\lambda = -\dfrac{2 < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >}{\|\overrightarrow{y}\|} \neq 0$, ce qui est absurde.
En conclusion, $\boxed{< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= 0}$

b) Nous venons de montrer que $\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \operatorname{Im} p \times \operatorname{Ker} p$, $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= 0$, c'est-à-dire $\operatorname{Im} p \perp \operatorname{Ker} p$, ainsi

$$\boxed{p \text{ est un projecteur orthogonal}}$$

3) *Remarque culturelle : f^* s'appelle l'adjoint de f, et dans une base orthonormée sa matrice est la transposée de la matrice de f. En quelque sorte, c'est l'opération sur les endomorphisme qui correspond à la transposition sur les matrices.*

a) Pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, $f^*(\overrightarrow{x}) \in \mathbb{R}^n$. Soit $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité à droite du produit scalaire,

$$\begin{aligned} f^*(\lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) &= \sum_{i=1}^{n} < f(\overrightarrow{e}_i), \lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} > \overrightarrow{e}_i \\ &= \lambda\sum_{i=1}^{n} < f(\overrightarrow{e}_i), \overrightarrow{x} > \overrightarrow{e}_i + \sum_{i=1}^{n} < f(\overrightarrow{e}_i), \overrightarrow{y} > \overrightarrow{e}_i \\ &= \lambda f^*(\overrightarrow{x}) + f^*(\overrightarrow{y}) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f^* \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n}$

b) Soit $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$, et $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e}_i$. Comme $(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n)$ est une base orthonormée, en développant

$$< \overrightarrow{x}, f^*(\overrightarrow{y}) >= \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j \overrightarrow{e}_j, \sum_{i=1}^{n} < f(\overrightarrow{e}_i), \overrightarrow{y} > \overrightarrow{e}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i < f(\overrightarrow{e}_i), \overrightarrow{y} >$$

Car $< \overrightarrow{e}_i, \overrightarrow{e}_j >= \delta_{ij}$. De plus, comme f est linéaire $f(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\overrightarrow{e}_i)$ et par linéarité du produit scalaire

$$< f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i < f(\overrightarrow{e}_i), \overrightarrow{y} >$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad < f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{x}, f^*(\overrightarrow{y}) >}$$

c) Soit $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. D'après ci-dessus, $< f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{x}, f^*(\overrightarrow{y}) >$, donc

$$\forall\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \qquad 0 =< f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} > - < \overrightarrow{x}, g(\overrightarrow{y}) >=< \overrightarrow{x}, f^*(\overrightarrow{y}) - g(\overrightarrow{y}) >$$

Ainsi, $f^*(\overrightarrow{y}) - g(\overrightarrow{y}) \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{0\}$, donc $f^*(\overrightarrow{y}) = g(\overrightarrow{y})$.
Conclusion : $\boxed{g = f^*}$

4) **a)** Soit $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. De même qu'au 1)2), $\overrightarrow{y} - p(\overrightarrow{y}) \in \text{Ker } p$, $p(\overrightarrow{x}) \in \text{Im } p$, et $\text{Ker } p \perp \text{Im } p$. Donc $< p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} - p(\overrightarrow{y}) >= 0$, puis

$$\boxed{< p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >=< p(\overrightarrow{x}), p(\overrightarrow{y}) >}$$

b) Par symétrie des rôles joués par $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$, nous avons aussi

$$\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2 \qquad < \overrightarrow{x}, p(\overrightarrow{y}) >=< p(\overrightarrow{y}), \overrightarrow{x} >=< p(\overrightarrow{y}), p(\overrightarrow{x}) >=< p(\overrightarrow{x}), p(\overrightarrow{y}) >$$

D'où $\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $< \overrightarrow{x}, p(\overrightarrow{y}) >=< p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >$
D'après a), $\boxed{p = p^*}$

5) **a)** Soit $\overrightarrow{x} \in \text{Im } p^*$, soit $\overrightarrow{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{x} = p^*(\overrightarrow{x}_0)$. D'après 3)b),

$$\begin{aligned} \forall\overrightarrow{y} \in \text{Ker } p \qquad < p(\overrightarrow{y}), \overrightarrow{x}_0 > &= < \overrightarrow{0}, \overrightarrow{x}_0 >= 0 \\ &= < \overrightarrow{y}, p^*(\overrightarrow{x}_0) >=< \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} > \end{aligned}$$

D'où $\forall\overrightarrow{y} \in \text{Ker } p$, $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= 0$. C'est-à-dire $\overrightarrow{x} \in (\text{Ker } p)^\perp$.
Conclusion : $\boxed{\text{Im } p^* \subset (\text{Ker } p)^\perp}$

b) Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. Comme p est un projecteur $\overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x}) \in \text{Ker } p$ et donc $\boxed{< \overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >= 0}$
L'égalité précédente s'écrit

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \qquad 0 =< \overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > - < p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > - < \overrightarrow{x}, p^*(\overrightarrow{y}) >=< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} - p$$

D'où $\overrightarrow{y} - p^*(\overrightarrow{y}) \in (\mathbb{R}^n)^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$ donc $\boxed{\overrightarrow{y} = p^*(\overrightarrow{y})}$
Par conséquent, $\overrightarrow{y} \in \text{Im } p^*$.
Ainsi nous venons de montrer $\overrightarrow{y} \in (\text{Ker } p)^\perp \Longrightarrow \overrightarrow{y} \in \text{Im } p^*$, i.e.

$$\boxed{(\text{Ker } p)^\perp \subset \text{Im } p^*}$$

En combinant a) et b) nous avons donc montré $(\text{Ker } p)^\perp = \text{Im } p^*$.

c) Supposons que $p = p^*$. Alors la question précédente s'écrit $(\text{Ker } p)^\perp = \text{Im } p$ et p est un projecteur orthogonal.
Donc $\boxed{p = p^* \Longrightarrow p \text{ est un projecteur orthogonal}}$

FIN DE L'ÉPREUVE