Lycée La Prat's
Classe de PT

Vendredi 8 avril 2016

Épreuve de Mathématiques 8

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (E3A MP 2014)

Soit $\mathscr{P}$ le plan euclidien muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On identifiera le plan euclidien au corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathscr{C}$ la conique d'équation

$$x^2 - y^2 + ax + by = \frac{1}{2}$$

Soit $p = a + ib$.

1) Quelle est la nature de la conique $\mathscr{C}$?

2) Préciser les axes de la conique $\mathscr{C}$.

3) Représenter graphiquement la conique $\mathscr{C}$ pour les valeurs particulières $a = b = 1$. On placera les éventuelles asymptotes.

4) Justifier que le point $\dfrac{-a+ib}{2}$ est centre de symétrie de la conique $\mathscr{C}$.

5) Expliciter (en fonction de p) des nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ tels que, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on ait l'équivalence

$$z \in \mathscr{C} \iff \alpha_1 z^2 + \alpha_2 \bar{z}^2 + \beta_1 z + \beta_2 \bar{z} = 1$$

6) À quelles condition le point p est-il un point de la conique $\mathscr{C}$?

Dans toute la suite de l'exercice, on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $p + q = -1$.
On suppose $b \geqslant 0$ et $pq = 2$.

7) Donner un polynôme de degré 2 dont les racines sont p et q. En déduire les valeurs de p et q.

8) Démontrer que $(\omega + \omega^2 + \omega^4)(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}) = 2$.

9) En déduire que

- ou bien $(\omega + \omega^2 + \omega^4) = p$ et $(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}) = q$,
- ou bien $(\omega + \omega^2 + \omega^4) = q$ et $(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}) = p$.

10) On admet que $\cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et que $\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\dfrac{8\pi}{7}\right) > 0$.
Démontrer que $(\omega + \omega^2 + \omega^4) = p$ et $(\omega^{-1} + \omega^{-2} + \omega^{-4}) = q$.

11) Démontrer que ω, ω^2 et ω^4 sont les trois racines du polynôme $X^3 - pX^2 + qX - 1$.

12) Déterminer un polynome de degré 4 dont les racines sont 1, ω, ω^2 et ω^4.

13) En déduire que 1, ω, ω^2 et ω^4 sont exactement les points d'intersection de la conique $\mathscr{C}$ avec le cercle de centre 0 et de rayon 1.

14) On note σ la symétrie orthogonale d'axe (Ox) du plan euclidien P.

a) Quelle est l'image du point d'affixe p ?

b) Représenter sur une meme figure le cercle de centre 0 et de rayon 1, $\mathscr{C}$, ainsi que $\sigma(\mathscr{C})$.

c) Soit E l'intersection du cercle de centre 0 et de rayon 1 et de $\mathscr{C} \cup \sigma(\mathscr{C})$. Décrire E.

Exercice 2 (E3A MP 2012)

Soit $\mathscr{P}$ le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1) Soit $\mathscr{D}$ la droite $(O, \overrightarrow{\imath})$ et $\mathscr{D}'$ la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{\imath}$ passant par le point $B(0,1)$ Soit $\mathscr{C}$ le cercle tangent à $\mathscr{D}$ en O et tangent à $\mathscr{D}'$ en B. Soit $t \in \mathbb{R}$.

Soit M_t le point sur la droite $\mathscr{D}'$ d'abscisse t et N_t l'intersection de la droite (OM_t) et du cercle $\mathscr{C}$ autre que le point O.

a) Que peut-on dire du triangle ON_tB ?

b) Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ et l'équation cartésienne de la droite (OM_t).

c) En déduire que le point N_t a pour coordonnées $\left(\dfrac{t}{1+t^2}, \dfrac{1}{1+t^2}\right)$.

d) Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{N_tM_t}$?

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ non nul, on note P_t le point tel que $\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{N_tM_t}$. On pose $P_0 = O$.

a) Représenter la courbe Γ lieu des points P_t lorsque t parcourt $\mathbb{R}$. On précisera les éventuelles asymptotes.

b) Préciser la nature du point P_0 de Γ.

3) Si $z \in \mathbb{C}$, on note $\overline{z}$ son conjugué. On considère l'application σ définie sur le plan $\mathscr{P}$ privé du point O par : l'image par σ du point M d'affixe z est le point M' d'affixe $1/\overline{z}$.

a) Soit M un point de $\mathscr{P}$ distinct de l'origine et soit $M' = \sigma(M)$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM}'$.

b) Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les coordonnées du point U_t, image par σ du point P_t défini dans la question 2.

c) Quelle est l'image par σ de la courbe Γ ?

Exercice 3 (PT 2014, A)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On travaille maintenant dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, noté toujours $<,>$. On désigne par $\| \ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. On note $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1) Soit p un projecteur orthogonal. En écrivant, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{u} = p(\overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u} - p(\overrightarrow{u}))$, montrer que

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n \qquad \|p(\overrightarrow{u})\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|$$

2) Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n \qquad \|p(\overrightarrow{u})\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|$$

a) Soit $\overrightarrow{x} \in \operatorname{Im} p$ et $\overrightarrow{y} \in \operatorname{Ker} p$. En considérant le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{x} + \lambda \overrightarrow{y}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda^2 \|\overrightarrow{y}\|^2 + 2\lambda < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > \geqslant 0$$

En déduire que $< \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} >= 0$.

b) Montrer que p est un projecteur orthogonal.

3) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On définit l'application f^* par

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n, \qquad f^*(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} < f(\overrightarrow{e}_i), \overrightarrow{x} > \overrightarrow{e}_i$$

a) Vérifier que f^* est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) En exprimant $\overrightarrow{x}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_n)$, montrer que,

$$\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad < f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} > = < \overrightarrow{x}, f^*(\overrightarrow{y}) >$$

c) Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad < f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} > = < \overrightarrow{x}, g(\overrightarrow{y}) >$$

Montrer que $g = f^*$.

4) Soit p un projecteur orthogonal.

a) Montrer que, pour tout $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $< p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} > = < p(\overrightarrow{x}), p(\overrightarrow{y}) >$.

b) En déduire que $p = p^*$.

5) Soit p un projecteur.

a) Montrer que $\text{Im } p^* \subset (\text{Ker } p)^\perp$.

b) Soit $\overrightarrow{y} \in (\text{Ker } p)^\perp$. Montrer que, pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, $< \overrightarrow{x} - p(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} > = 0$.
En déduire que $\overrightarrow{y} = p^*(\overrightarrow{y})$ puis que $(\text{Ker } p)^\perp \subset \text{Im } p^*$.

c) Montrer que si $p = p^*$, alors p est un projecteur orthogonal.

FIN DE L'ÉPREUVE