Épreuve de Mathématiques 7

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants 0, 1, 2, 3, ...
Ces deux ampoules sont supposées indépendantes l'une de l'autre.
À l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent donc être soit dans l'état allumé, soit dans l'état grillé. La possibilité qu'une ampoule soit éteinte n'est pas considérée ici.
À chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoule allumée a la probabilité $\frac{1}{2}$ de rester allumée et $\frac{1}{2}$ de griller.
On note, pour tout n entier naturel, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n. On remarquera que X_n peut prendre les valeurs 0, 1 et 2, c'est à dire que $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le vecteur colonne $U_n \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$$

Partie 1 (Préliminaires)

1) Déterminer la loi de X_0, son espérance et sa variance.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$$

3) Déterminer sans justification les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0) \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, 0\}\ \forall j \in \{0, 1, 2\} \quad P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

Montrer alors que $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

Partie 2 (Espérance et variance des X_n)

On se propose de déterminer l'espérance et la variance de tous les X_n sans chercher leur loi. On introduit les matrices de $\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Calcul de l'espérance.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $E(X_n) = L_1 U_n$.

b) Calculer $L_1 A$ et exprimer le résultat uniquement en fonction de L_1.

En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}) = \dfrac{1}{2} E(X_n)$.

c) Exprimer $E(X_n)$ en fonction de n.

2) Calcul du moment d'ordre 2.

a) Calculer $E(X_n^2)$ en fonction de L_2 et U_n.

b) Calculer $L_2 A$ et montrer qu'il existe deux réels α et β, que l'on déterminera, tels que :

$$L_2 A = \alpha L_1 + \beta L_2$$

c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}^2) = \dfrac{1}{4} E(X_n^2) + \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

d) En déduire l'expression de $E(X_n^2)$ en fonction de n.

3) Déterminer l'expression de la variance $V(X_n)$ en fonction de n.

Exercice 2

Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ les droites d'équations respectives

$$\begin{cases} y &= 0 \\ 4z &= -1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x &= 0 \\ 4z &= 1 \end{cases}$$

Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points de l'espace équidistants des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

Exercice 3

Partie 3 (2 surfaces)

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $\left(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$, on considère la surface S d'équation cartésienne

$$z = \left(y - 2\sqrt{2}x\right) y$$

ainsi que la surface Σ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}uv \\ y = (u+v)^2 \\ z = \left(u^2 - v^2\right)^2 \end{cases} \quad , \ (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

On note $M(u, v)$ le point de Σ de paramètres u et v.

1) *À propos de S.*

a) Quelle est la nature de l'intersection de S avec un plan d'équation $y = \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$? Qu'en déduit-on pour S ?

b) Quelle est la nature de l'intersection de S avec un plan d'équation $x = \beta$, où $\beta \in \mathbb{R}$?

c) **i)** Quelle est la nature de l'intersection Λ_γ de S avec un plan d'équation $z = \gamma$, où $\gamma \in \mathbb{R}$? Distinguer différents cas suivant les valeurs de γ.

ii) On note O_γ le point de coordonnées $(0, 0, \gamma)$. Tracer les courbes Λ_γ dans le repère $\left(O_\gamma\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ pour $\gamma \in \{-2, 0, 1\}$.
On pourra confondre les points O_γ et tracer les 3 courbes dans le même repère.

d) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S en un point M_0 de S de coordonnées (x_0, y_0, z_0). Cette équation ne devra pas dépendre de z_0.

e) Dans le cas particulier où M_0 est le point O, préciser la position relative de S et du plan tangent.

2) C*omparaison de S et Σ.*

a) Vérifier que $\Sigma \subset S$.

b) A-t-on $\Sigma = S$?

3) *À propos de* Σ.

a) Déterminer la nature géométrique de l'ensemble des points non réguliers de Σ.

b) Soit $M(u,v)$ un point régulier de Σ. Déterminer, en fonction des paramètres u et v, une équation cartésienne du plan tangent à Σ au point $M(u,v)$.

Partie 4 (Une famille de courbes)

Soit a un réel distinct de 1 et -1. On note $A_a(u)$ le point $M(u, au)$ de Σ et Γ_a l'ensemble des points $A_a(u)$ lorsque u parcourt $\mathbb{R}_+^*$.

1) Donner une représentation paramétrique de Γ_a.

2) **a)** Justifier que les vecteurs $\dfrac{d\overrightarrow{OA_a}}{du}(u)$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{OA_a}}{du^2}(u)$ engendrent un plan.

On note alors $P_a(u)$ le plan passant par $A_a(u)$ et dirigé par les vecteurs $\dfrac{d\overrightarrow{OA_a}}{du}(u)$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{OA_a}}{du^2}(u)$.

b) Justifier, à l'aide de la partie I, l'existence de la normale à Σ en tout point $A_a(u)$ de Γ_a.

c) Déterminer a pour qu'en tout point $A_a(u)$ de Γ_a, la normale à Σ en $A_a(u)$ soit incluse dans $P_a(u)$.
On donne, si nécessaire, $a^4 + 5a^3 + 6a^2 + 5a + 1 = \left(a^2 + a + 1\right)\left(a^2 + 4a + 1\right)$.

Exercice 4

Un individu joue avec une pièce non nécessairement symétrique. On note p la probabilité d'obtenir pile et on suppose seulement $p \in]0,1[$.
Dans un premier temps, il lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois pile. On note N le nombre de lancers nécessaires.
Dans un deuxième temps, il lance N fois cette même pièce et on note X le nombre de piles obtenus au cours de cette seconde série de lancers.

1) Préciser la loi de N, et la loi conditionnelle de X sachant $N = n$.

2) Déterminer la loi du couple (N, X).

3) On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $\forall x \in]-1,1[: f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
Donner l'expression de la dérivée $k^{ième}$ de f pour tout $k \geqslant 0$.
En déduire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1/(1-x)^{k+1}$ au voisinage de 0 pour k entier positif.

4) En déduire que la loi de X est donnée par

$$\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = \frac{(1-p)}{(2-p)}.$$

5) Soit $\lambda \in]0,1[$, U une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre λ et V une variable aléatoire géométrique de paramètre λ indépendante de U. On note $Y = UV$.

a) Sans calculer sa loi, calculer l'espérance de Y.

b) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ (on pourra traiter séparément le cas $k = 0$).

c) Calculer la variance de Y.

6) En déduire que X a même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une étant une variable de Bernoulli et l'autre une variable géométrique de même paramètre.

FIN DE L'ÉPREUVE