

Épreuve de Mathématiques 7

Correction

Exercice 1 (PT 2013 C)

Partie 1

1) On effectue le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(\pi/2 - t) \,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^{2n}(u)(-1) \,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t$$

Conclusion : $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t}$

2) $\forall t \in [0, \pi]$, $\sin(\pi - t) = \sin(t)$ donc par symétrie

$$J_n = \int_0^{\pi} \sin^{2n} t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n} t \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \,\mathrm{d}t$$

D'où, d'après 1), $\boxed{J_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t}$

3) $\forall t \in \mathbb{R}$, $\boxed{e^{it} = \cos t + i \sin t}$. D'où $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$.

Ces formules sont aussi valables pour $t \in \mathbb{C}$

4) Pour tout a, b dans un anneau, qui commutent,

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

5) Pour $k \neq 0$,

$$\int_0^{\pi} e^{ikt} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ 2i/k & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

Pour $k = 0$, $\int_0^{\pi} e^{ikt} \,\mathrm{d}t = \pi$.

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^{\pi} e^{ikt} \,\mathrm{d}t = \begin{cases} \pi & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \text{ pair non nul} \\ 2i/k & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}}$$

6) $\boxed{\cos^{2n} t = \left(\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^{2n} = \dfrac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{ikt} e^{-i(2n-k)t} = \dfrac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{2i(k-n)t}}$.

7) D'après 6) et 5), il vient

$$\int_0^\pi \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\int_0^\pi e^{2i(k-n)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\int_0^\pi e^{2i\times 0\times t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\pi$$

Conclusion $\boxed{\displaystyle\int_0^\pi \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\pi}$

8) D'après ci-dessus,

$$J_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\pi = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^n (2k-1)2k}{2^n n!\Big(\displaystyle\prod_{k=1}^n 2k\Big)}\pi = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^n (2k-1)}{2^n n!}\pi$$

Conclusion :

$$\boxed{J_n = \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2^n n!}\pi}$$

Partie 2

1) Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$|c^2 \sin^2 t| \leqslant c^2 < 1$$

Donc $1 - c^2\sin^2 t > 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-c^2\sin^2 t}}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi, $\boxed{I(c) \text{ est bien définie, comme intégrale sur un segment}}$

2) **a)** La fonction f est définie lorsque $1 - x^2 > 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathscr{D}_f =]-1,1[}$$

b) La fonction $x \mapsto 1 - x^2$ est à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathscr{D}_f$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Conclusion $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathscr{D}_f \text{ comme composée de fonctions dérivables.}}$

c) Pour tout $x \in \mathscr{D}_f =]-1,1[$,

$$f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$$

Or $g(u) = (1+u)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$:

$$\forall u \in]-1,1[, \qquad g(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$$

Comme, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $u = -x^2 \in]-1,1[$,

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f(x) = g(-x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n x^{2n}$$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est développable en série entière sur } \mathscr{D}_f}$

d) Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

D'où, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$(1-x^2)f'(x) - xf(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est solution sur } \mathscr{D}_f \text{ de l'équation différentielle } (\mathscr{E}_f)}$

e) **i)** D'après 2)c), f admet un développement en série entière sur $]-1,1[$. À l'intérieur de son domaine de convergence, la série entière est dérivable terme à terme :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\alpha_n x^{n-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (\mathscr{E}_f) &\iff \forall x \in]-1,1[\quad (1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} n\alpha_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n x^n = 0 \\
&\iff \forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} n\alpha_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n\alpha_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n x^{n+1} = 0 \\
&\iff \forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\alpha_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)\alpha_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_{n-1}x^n = 0 \\
&\iff \forall x \in]-1,1[\quad \alpha_1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big((n+1)\alpha_{n+1} - (n-1)\alpha_{n-1} - \alpha_{n-1}\Big)x^n = 0 \\
&\iff \begin{cases} \alpha_1 &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)\alpha_{n+1} - n\alpha_{n-1} &= 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

La dernière équivalence s'obtient par unicité du développement en série entière.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\alpha_{n-1}}$

ii) D'après ci-dessus, $\alpha_1 = 0$, donc par un récurrence (à faire), $\alpha_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_p : \quad \alpha_{2p} = J_p/\pi$$

est vraie pour tout $p \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: Comme $f(0) = \alpha_0 = 1 = J_0/\pi$, $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_p$ vraie. D'après i),

$$\alpha_{2(p+1)} = \frac{2p+1}{2p+2}\alpha_{2p} = \frac{(2p+1).1.3.5.\ldots.(2p-1)}{2(p+1)2^p p!} = J_{p+1}/\pi$$

  Donc $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall p \geqslant 0 \qquad \alpha_{2p} = J_p/\pi}$

iii) Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\qquad f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}\alpha_{2p}x^{2p} = \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} J_p x^{2p}}$$

3) D'après 1.1), $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}J_p$. En remplaçant :

$$I(c) = \sum_{p=0}^{+\infty}\alpha_{2p}c^{2p}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} J_p^2 c^{2p} = \frac{\pi}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\right)^2 c^{2p}$$

Exercice 2 (CCP 2010 TSI, partiel)

Partie 1 (Étude d'une équation différentielle)

1) Sur $]0,+\infty[$, $(\mathscr{E})$ s'écrit $y' + \dfrac{1}{x^2}y = 0$, et a donc pour solutions

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{x \mapsto Ce^{\frac{1}{x}} \mid C \in \mathbb{R}\right\}}$$

2) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

<u>Étude en $+\infty$</u> : $t^2 \dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \sim t e^{-\frac{t}{x}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée ($x > 0$). Donc $\dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = o(1/t^2)$.

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par comparaison $t \mapsto \dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ est aussi intégrable en $+\infty$.

Ainsi, l'intégrale $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.

Conclusion : $\boxed{\varphi(x) \text{ existe}}$

3) Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$.

Posons $\psi(t) = \dfrac{1}{a^2} \dfrac{t e^{-\frac{t}{b}}}{1+t}$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. Montrons que cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$.
La fonction ψ est continue sur $[0, +\infty[$.
<u>Étude en $+\infty$</u> :

$$t^2 \psi(t) = \frac{t^2}{a^2} \frac{t e^{-\frac{t}{b}}}{1+t} \sim \frac{t^3}{a^2 t} e^{-\frac{t}{b}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

par croissance comparée ($b > 0$). Donc $\psi(t) = o(1/t^2)$.

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par comparaison ψ est aussi intégrable en $+\infty$. Conclusion :

$$\boxed{\psi \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[}$$

Appliquons le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme sur l'intervalle $[a, b]$. Posons

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times [0, +\infty[, \qquad h(x, t) = \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$$

- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x, t) = \dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et sa dérivée est

$$x \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = t x^{-2} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$$

- Pour tout $x \in [a, b]$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est **intégrable** sur $[0, +\infty[$ d'après 2),

  la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t) = t x^{-2} \dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

- La fonction $\psi(t) = \dfrac{1}{a^2} \dfrac{t e^{-\frac{t}{b}}}{1+t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après ci-dessus, et

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times [0, +\infty[\qquad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1}{x^2} \frac{t e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \leqslant \psi(t)$$

Donc, d'après le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe somme,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est } C^1 \text{ sur } [a, b] \text{ et } \varphi'(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-t/x}}{1+t}\,\mathrm{d}t.}$$

(L'hypothèse $\mathbf{t \mapsto h(x, t)}$ **intégrable** *de doit pas être oubliée !)*

4) Ainsi φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\displaystyle\bigcup_{0<a<b} [a, b] =]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$x^2 \varphi'(x) + \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} + \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{-1/x} \right]_0^{+\infty} = x$$

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est solution sur }]0, +\infty[\text{ de l'équation différentielle } (\mathscr{E}_1)}$

5) Les solutions de $(\mathscr{E}_1)$ sont de la forme une solution particulière plus une solution générale de l'équation sans second membre :

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \left\{x \mapsto \varphi(x) + Ce^{\frac{1}{x}} \ \mid \ C \in \mathbb{R}\right\}}$$

Partie 2 (Détermination d'une valeur approchée de $\varphi(x)$)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 0$. Somme des termes d'une série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n}(-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}$$

Par conséquent, en multipliant par $e^{-\frac{t}{x}}$,

$$\boxed{\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}}$$

2) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions $t \mapsto t^k e^{-\frac{t}{x}}$ et $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et par croissance comparée,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{k+2}e^{-\frac{t}{x}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to+\infty} t^2\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = 0$$

Donc ces deux fonctions sont des petits o de $1/t^2$ en $+\infty$, et de même qu'au 1.2), elles sont intégrables au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty}\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t \text{ existent}}$

Nous pouvons donc intégrer l'égalité obtenue au 1). La somme est *finie* donc par linéarité

$$\boxed{\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

3) On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $I_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$

a) $I_0(x) = \left[\dfrac{e^{-t/x}}{-1/x}\right]_0^{+\infty} = x.$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par partie. Soit $u = \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$ et $v = e^{-t/x}$. Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} uv = 0$ par croissance comparée, on peut écrire

$$I_k(x) = [uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{t^{k+1}}{k+1}(-1/x)e^{-t/x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x(k+1)}I_{k+1}(x)$$

Conclusion : $\boxed{I_{k+1}(x) = (k+1)xI_k(x)}$

c) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad I_k(x) = k!x^{k+1}$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie d'après a).
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. $I_{k+1}(x) \overset{\text{b)}}{=} (k+1)xI_k(x) = (k+1)xk!x^{k+1} = (k+1)!x^{k+2}$. Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad I_k(x) = k!x^{k+1}}$

4) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 2) puis 3)c),

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(x) + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k!x^{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Donc $R_n(x) = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left| \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \right| \mathrm{d}t$$

Or $0 < \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ sur $[0, +\infty[$, ce qui entraine,

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t = I_{n+1}(x) = (n+1)!x^{n+2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ |R_n(x)| \leqslant (n+1)!x^{n+2}}$

b) $u_n \neq 0$ donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)!10^{n+2}}{10^{n+3}(n+1)!} = \frac{n+2}{10}$$

Donc pour tout $n \in \{0, \ldots, 8\}$, $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et la suite est décroissante ($u_n > 0$). Pour $n \geqslant 8$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ et la suite devient croissante.

Donc $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est minimale pour } n = 8}$ et $\boxed{u_8 \simeq 3.63 \times 10^{-5}}$

c) $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{8} (-1)^k I_k(1/10) + R_8(1/10)$, et d'après b) $|R_8(1/10)| \leqslant 4 \times 10^{-5}$.

Donc on peut obtenir $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right)$ avec 4 chiffres significatifs en calculant $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} (-1)^k I_k(1/10)$.

5) Soit $z \neq 0$ et $v_k = (-1)^k k! z^{k+1}$.

$$\left| \frac{v_{k+1}}{v_k} \right| = (k+1)|z| \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty > 1$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert, $\sum |v_k|$ diverge grossièrement, donc $\sum v_k$ aussi.

Ainsi, $\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k k! z^{k+1} \text{ est } 0}$

En particulier cette série n'est pas convergente pour $z = \dfrac{1}{10}$.

On vient d'utiliser une série divergente (et pas qu'un peu divergente) pour approximer $\varphi(1/10)$....

FIN DE L'ÉPREUVE