Lycée La Prat's
Classe de PT

Vendredi 11 mars 2016

Épreuve de Mathématiques 7

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Partie 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$J_n = \int_0^{\pi} \sin^{2n} t \, \mathrm{d}t$$

1) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t$.

2) Montrer que $\displaystyle J_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t$.

3) Rappeler les formules d'Euler, relatives à l'exponentielle complexe.

4) Rappeler la formule du binôme de Newton.

5) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{ikt} \, \mathrm{d}t$.

6) À l'aide du binôme de Newton, exprimer, pour tout réel t, $\cos^{2n} t$ en fonction d'exponentielles complexes.

7) Que vaut $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t$?

8) En déduire

$$J_n = \frac{1.3.5.\dots(2n-1)}{2^n n!}\pi$$

Partie 2

Soit $c \in [0, 1[$. On pose

$$I(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 t}}$$

1) Montrer que $I(c)$ est bien définie.

2) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

- **a)** Donner le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
- **b)** Montrer que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$.
- **c)** Montrer que f est développable en série entière sur $\mathscr{D}_f$ (on ne calculera pas ici ce développement en série entière).
- **d)** Montrer que f est solution sur $\mathscr{D}_f$ de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2) f'(x) - x f(x) = 0 \qquad (\mathscr{E}_f)$$

e) On recherche le développement en série entière de f sur $\mathscr{D}_f$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$$

i) Donner, pour tout entier naturel non nul n, une relation de récurrence entre α_{n+1} et α_{n-1}.

ii) Pour tout entier naturel p, exprimer α_{2p} et α_{2p+1} en fonction de p.

iii) Donner le développement en série entière de f.

3) On suppose que

$$I(c) = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha_{2p} c^{2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} t \,\mathrm{d}t$$

En utilisant les résultats de la partie 1, en déduire l'expression de $I(c)$ sous la forme

$$I(c) = \pi S$$

où S désigne la somme d'une série où les termes $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} t \,\mathrm{d}t$ n'apparaissent plus.

Exercice 2

Notons

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \,\mathrm{d}t$$

Partie 1 (Étude d'une équation différentielle)

On considère l'équation différentielle $(\mathscr{E})$: $x^2 y' + y = 0$.

1) Résoudre $(\mathscr{E})$ sur $]0, +\infty[$.

2) Justifier l'existence de $\varphi(x)$, pour tout $x > 0$.

3) Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et donner, pour $x \in [a, b]$, l'expression de la dérivée $\varphi'(x)$ à l'aide d'une intégrale.

4) En déduire que φ est classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, puis montrer que φ est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$x^2 y' + y = x \qquad (\mathscr{E}_1)$$

5) En déduire à l'aide de φ l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E}_1)$ sur $]0, +\infty[$.

Partie 2 (Détermination d'une valeur approchée de $\varphi(x)$)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 0$, on a

$$\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$$

2) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} \,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \,\mathrm{d}t$.

En déduire que

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} \,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \,\mathrm{d}t$$

3) On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $I_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} \,\mathrm{d}t$

a) Calculer $I_0(x)$.

b) Donner pour $k \in \mathbb{N}$ une relation entre $I_{k+1}(x)$ et $I_k(x)$.

c) En déduire que $I_k(x) = k!x^{k+1}$.

4) On pose désormais, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! x^{k+1}$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leqslant (n+1)!x^{n+2}$.

b) On suppose désormais que $x = \dfrac{1}{10}$, et on pose $u_n = (n+1)!(1/10)^{n+2}$. En étudiant le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que la suite (u_n) est minimale pour $n = 8$. Donner une valeur numérique de u_8 à l'aide de votre calculatrice.

c) À quelle précision peut-on obtenir une valeur de $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right)$, à l'aide des questions précédentes ?

5) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k k! z^{k+1}$? Cette série est-elle convergente pour $z = \dfrac{1}{10}$?

Cet exercice est une illustration de la citation suivante de Henri Poincaré :
« Il y a entre les géomètres[1] *et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les 20 premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment. »*

FIN DE L'ÉPREUVE

1. L'analyse est à cette époque considérée comme une partie de la géométrie.