Épreuve de Mathématiques 6

Correction

Exercice 1 (Réduction et tracé de conique)

Partie quadratique : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.
Elle est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée.

$$\chi_A(x) = \det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -4 \\ -4 & x+5 \end{vmatrix} = (x-1)(x+5) - 16 = x^2 + 4x - 21$$

Comme $\Delta = 4^2 + 4 \times 21 = 4 \times 25 = 100$, on a $\lambda = \dfrac{-4 \pm 10}{2}$ et

$$\mathrm{Sp}\,(A) = \{-7, 3\}$$

Les deux valeurs propres sont de signe opposé (ce qui peut se voir aussi avec le déterminant), donc la courbe est une hyperbole ou un cas dégénéré associé (deux droites).
Déterminons les sous-espaces propres $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(\lambda I_3 - A)$:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_3 &\iff \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 2x - 4y = 0 \\ &\iff X \in \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

Donc $E_3 = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix})$.
Comme A est symétrique réelle, $E_{-7} \perp E_3$, et donc, pour des raisons dimensionnelles, $E_{-7} = E_3^\perp$. Ainsi une base orthonormée $\mathscr{B}'$ de diagonalisation et les matrices diagonales et de passage associée sont

$$\mathscr{B}' = (\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}) \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

En notant $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées dans $\mathscr{B}'$, la partie quadratique s'écrit

$$x^2 + 8xy - 5y^2 = {}^tXAX = {}^tX'DX' = 3x'^2 - 7y'^2$$

Partie linéaire : La formule de changement de base s'écrit

$$X = PX' \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') \end{cases}$$

En remplaçant dans la partie linéaire :

$$\begin{aligned} -28x+14y &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(-4\times 7(2x'-y')+2\times 7(x'+2y')\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(-6\times 7x'+8\times 7y'\Big) \end{aligned}$$

Lorsque les nombres deviennent grands, les garder sous forme de produits de facteurs peut être une bonne idée.
Puis l'équation s'écrit dans $\mathscr{B}'$:

$$\begin{aligned} x^2+8xy-5y^2-28x+14y+3 &= 3x'^2-7y'^2-\frac{6\times 7}{\sqrt{5}}x'+\frac{8\times 7}{\sqrt{5}}y'+3 \\ &= 3\Big(x'^2-2\frac{7}{\sqrt{5}}x'\Big)-7\Big(y'^2-2\frac{4}{\sqrt{5}}y'\Big)+3 && (\star) \\ &= 3\left(\left(x'-\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{7^2}{5}\right)-7\left(\left(y'-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)-\frac{4^2}{5}\right)+3 && (\star) \\ &= 3x''^2-7y''^2\underbrace{-\frac{3\times 7^2}{5}+\frac{7\times 4^2}{5}+3}_{=K} \end{aligned}$$

Ne pas sauter d'étape lors de la mise sous forme canonique. Je déconseille vivement d'essayer de faire des prouesses et une des lignes $(\star)$ de tête : vous vous contenterez de perdre des points et du temps bêtement.
Et $K=\dfrac{7}{5}(-21+16)+3=-7+3=-4$. Ainsi, l'équation s'écrit dans $\mathscr{B}'$

$$3x''^2-7y''^2-4=0 \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} x''=x'-\dfrac{7}{\sqrt{5}} \\ y''=y'-\dfrac{4}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> : On effectue le changement d'origine $\Omega(\frac{7}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}})$. Dans le nouveau repère $(\Omega,\mathscr{B}')$, l'équation s'écrit $3x''^2-7y''^2=4$ c'est-à-dire $\frac{3}{4}x''^2-\frac{7}{4}y''^2=1$. Finalement, sous forme réduite :

$$\boxed{\frac{x''^2}{a^2}-\frac{y''^2}{b^2}=1 \qquad \text{avec} \qquad a=\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad b=\frac{2}{\sqrt{7}}}$$

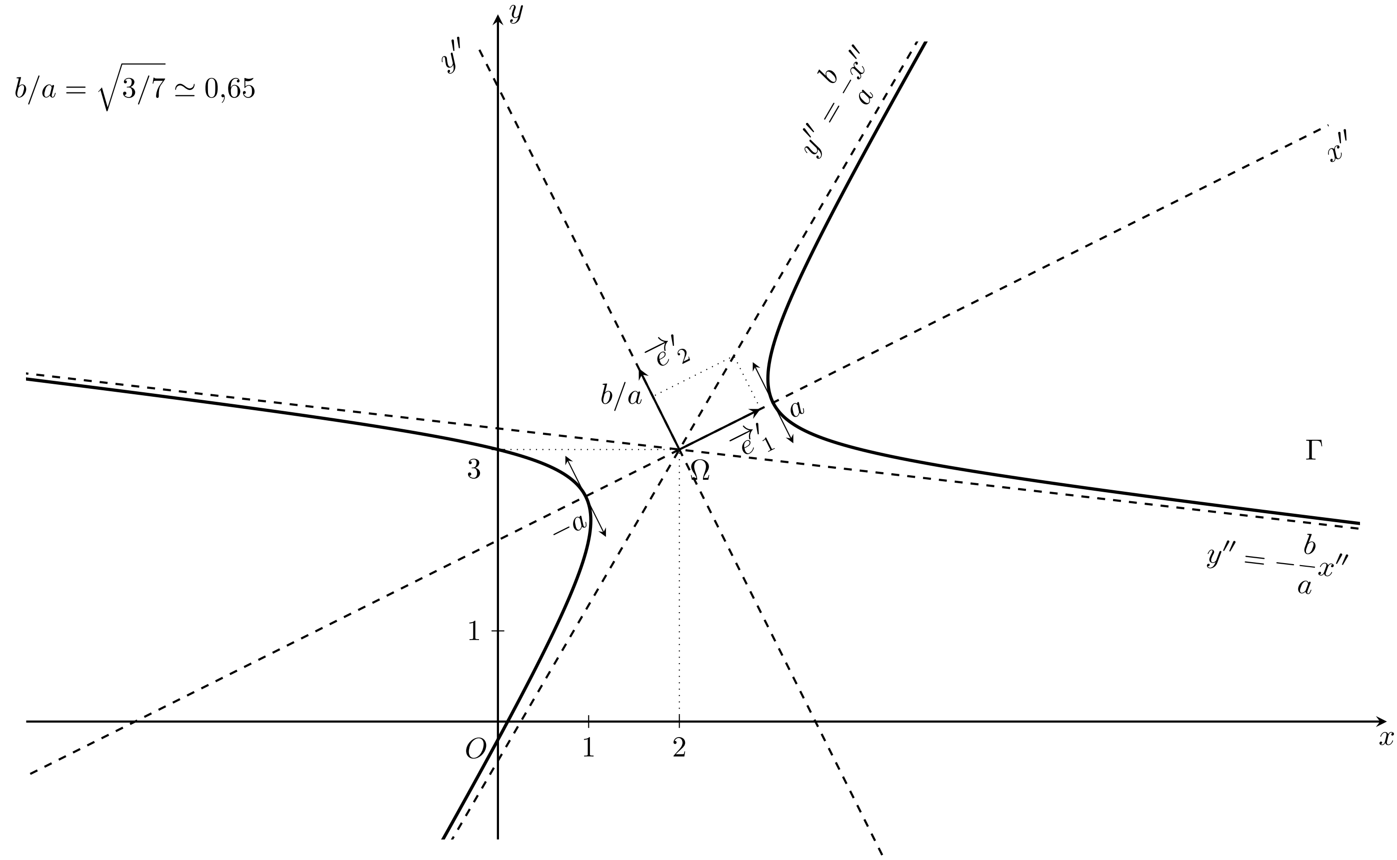
Le centre Ω du nouveau repère a pour coordonnées dans $\mathscr{B}'$ *(avec pour origine O)* $(\frac{7}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}})$, et dans $\mathscr{B}$:

$$X_\Omega=PX'_\Omega=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{7}{\sqrt{5}}\\\frac{4}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}14-4\\7+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{\text{Le centre de la conique et du nouveau repère est } \Omega(2,3)}$$

Les asymptotes de l'hyperbole ont pour équations $y''=\frac{b}{a}x''=\sqrt{\frac{3}{7}}x''$ et $y''=-\sqrt{\frac{3}{7}}x''$ dans le repère $(\Omega,\mathscr{B}')$.
<u>Tracé</u> :



Déterminer directement le centre : Soit $f(x,y) = x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3$. Le centre Ω de la conique est l'unique point critique de f.

$$
\begin{aligned}
\Omega(x,y) \text{ centre de la conique } &\iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + 8y - 28 = 0 \\ 8x - 10y + 14 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 4y = 14 \\ 4x - 5y = -7 \end{cases} \\
&\iff (\dots) \\
&\iff \begin{cases} x = 14 - 12 = 2 \\ y = 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Exercice 2 (Réduction de deux matrices orthogonales)

1) ${}^tMM = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I_3$. Donc $M \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R})$: $\boxed{f \text{ est une isométrie}}$

$$\begin{aligned}\det M &= \frac{1}{2^3}\begin{vmatrix}1 & -\sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 1\end{vmatrix}\\ &= \frac{1}{2^3}\begin{vmatrix}2 & -\sqrt{2} & 1\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\\ 2 & \sqrt{2} & 1\end{vmatrix} C_1 \leftarrow C_1 + C_3\\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2^3}\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det M &= \frac{\sqrt{2}}{2^2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix} \begin{matrix}\longleftarrow\\ C_2 \leftarrow C_2 + C_1\\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1\end{matrix}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2^2}\begin{vmatrix}0 & -\sqrt{2}\\ 2 & 0\end{vmatrix}\\ &= 1\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est une rotation}}$

Déterminons $E_1 = \mathrm{Ker}\,(I_3 - M)$ son axe :

Comme $M \neq I_3$, $\dim E_1 = 1$. De plus, $M\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix})}$$

Déterminons l'angle θ de la rotation :

$\mathrm{Tr}\ M = 1 + 2\cos\theta = 1$ donc $\cos\theta = 0$, puis $\boxed{\theta = \pm\frac{\pi}{2}[2\pi]}$

Signe de l'angle :

Soit $x = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, déterminons l'orientation de la famille $(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, x, f(x))$. En développant par rapport à la deuxième colonne,

$$\det(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, x, f(x)) = \begin{vmatrix}1 & 0 & -\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & \sqrt{2}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2}\end{vmatrix} = 2\sqrt{2} > 0$$

Donc $\theta = +\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est la rotation d'axe } \mathrm{Vect}\,(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}) \text{ et d'angle } \frac{\pi}{2}, \text{ où l'axe est orienté par } \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.}$$

2) ${}^tMM = \frac{1}{9^2}\begin{pmatrix}81 & 0 & 0\\ 0 & 81 & 0\\ 0 & 0 & 81\end{pmatrix} = I_3$. Donc $M \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R})$: $\boxed{f \text{ est une isométrie}}$

De plus, ${}^tM = M$, donc $M^2 = I_3$: g est une symétrie orthogonale.

Déterminons ses invariants $E_1 = \mathrm{Ker}\,(I_3 - M)$:

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_1 \iff \frac{1}{9}\begin{pmatrix}17&-4&-1\\-4&2&-4\\-1&-4&17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}17x-4y-z&=&0\\-2x+y-2z&=&0\\-x-4y+17z&=&0\end{array}\right. \qquad L_1\leftarrow L_1-L_3$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}18x-18z&=&0\\y&=&4z\\-z-16z+17z&=&0\end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\4z\\z\end{pmatrix}$$

$$\iff X\in \text{Vect}\,(\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix})$$

Donc $E_1=\text{Vect}\,(\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix})$. En conclusion,

$$\boxed{g \text{ est la symétrie orthogonale d'axe Vect}\,(\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix})}$$

Exercice 3 (PT 2015 C)

1) Soit $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$, $u_n\neq 0$.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{n!(2n+1)}{(n+1)!(2n+3)}=\frac{2n+1}{(n+1)(2n+3)}\sim\frac{2n}{2n^2}=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0<1$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

Conclusion : $\boxed{\text{La série de terme général } \dfrac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \text{ converge}}$

On peut aussi comparer à une série de Riemann. Ici, la convergence est très rapide ($n!$ au dénominateur et rien qui compense) donc D'Alembert a des chances de nous donner le résultat.

2) D'après le cours, $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Donc, pour tout $t\in\mathbb{R}$, avec $x=-t^2\in\mathbb{R}$,

$$e^{-t^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-t^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } t\mapsto e^{-t^2} \text{ est développable en série entière sur } \mathscr{D}=\mathbb{R}, \text{ et } e^{-t^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}}$$

3) On peut intégrer terme à terme une série entière à l'intérieur du domaine de convergence. Or $[0,1] \subset \mathscr{D} = \mathbb{R}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(car on peut intégrer terme à terme : } [0,1] \subset \mathscr{D}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}
\end{aligned}$$

C'est une question de la forme « montrer que », et on ne cherche sans doute pas à vérifier que vous savez calculer $\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t$ *: il faut justifier soigneusement. Jamais d'inversion limite (ici* $\sum^{+\infty}$*) / intégrale sans théorème.*

Conclusion : $\boxed{\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}}$

4) **a)** D'après ci-dessus, $\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} + R_n$. Donc

$$\left|\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}\right| = |R_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)!(2n+3)} = |u_{n+1}|$$

Or, comme $\lim_{n\to+\infty} |u_{n+1}| = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n+1}| < \varepsilon$ (par définition de la limite). Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } \frac{1}{(n+1)!(2n+3)} < \varepsilon, \text{ alors } \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \text{ est une valeur approchée à } \varepsilon \text{ près de } \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

b) On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n+1)!(2n+3) > 10^3$.

Pour $n = 3$,

$$\begin{aligned}
(n+1)!(2n+3) &= 4 \times 3 \times 2 \times 9 \\
&= 12 \times 9 \times 2 \\
&= 108 \times 2 \\
&= 216 < 10^3
\end{aligned}$$

Donc $n = 3$ ne convient pas.

Pour $n = 4$,

$$\begin{aligned}
(n+1)!(2n+3) &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 11 \\
&> 5 \times 4! \times 9 \\
&> 5 \times 216 > 10^3
\end{aligned}$$

Donc $n = 4$ convient.

Conclusion :

$$\boxed{r = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \text{ est une valeur numérique approchée de } \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$$

Exercice 4 (PT 2016 C)

1) $|x| \leqslant \frac{1}{4} \Longrightarrow -1 \leqslant 4x \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant 1 - 4x$.

Donc $\Delta = 1 - 4x \geqslant 0$, et l'équation a deux racines réelles, confondues pour $x = 1/4$:

$$\boxed{\mathcal{Y}_1 = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}_1 = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}}$$

2) Comme

$$1-4x \geqslant 0 \iff 1 \leqslant 4x \iff \frac{1}{4} \leqslant x$$

Il vient $\boxed{\mathcal{I}_{\mathcal{Y}} =]-\infty, \frac{1}{4}]}$

3) Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Avec $\displaystyle\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

La notation $\binom{\alpha}{n}$ doit être explicitée (ce n'est pas une notation du programme) : cf. ci-dessus

4) Pour tout $t \in]-1,1[$,

$$(1+t)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} t^n$$

Donc, pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, $t = -4x \in]-1,1[$ et

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n 2^{2n} x^n$$

Donc, toujours pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$,

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4x)^{1/2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^{n+1} 2^{2n-1} x^n$$

Donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathscr{D}_S =]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n \text{ en posant } \left\{ \begin{array}{rcl} S_0 & = & f(0) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n & = & (-1)^{n+1} 2^{2n-1} \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k\right)}{n!} \end{array} \right.}$$

5) Cf. cours. Sur les séries entières (je précise, au cas où ...).

6) Soit $x \in]-1/4, 1/4[$. D'après 1), $f(x)$ est solution de $\mathcal{Y}^2 - \mathcal{Y} + x = 0$. Donc

$$f(x)^2 - f(x) + x = 0$$

Ainsi,

$$f(x)^2 = f(x) - x = -x + \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

Or, à l'aide de la formule du produit de Cauchy rappelée à la question précédente,

$$f(x)^2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} S_k S_{n-k}\right) x^n$$

Donc, par unicité du développement en série entière,

$$\forall n \geqslant 2, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} S_k S_{n-k} \qquad \text{et} \qquad -1 + S_1 = S_0 S_1 + S_1 S_0$$

De plus $S_0 = S_{n-n} = f(0) = 0$, donc il vient

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k S_{n-k}}$$

7) Soit $n \geqslant 2$. D'après 4), $S_n = (-1)^{n+1} 2^{2n-1} \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right)}{n!}$. Or

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right) &= \frac{1}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(1-2k)\\ &= \frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1)\\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right) &= \frac{(-1)^{n+1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(2k)(2k-1)}{2^n\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(2k)}\\ &= \frac{(-1)^{n+1}(2(n-1))!}{2^{2n-1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}k}\\ &= \frac{(-1)^{n+1}(2(n-1))!}{2^{2n-1}(n-1)!}\end{aligned}$$

Ainsi, $S_n = (-1)^{n+1}2^{2n-1}\dfrac{(-1)^{n+1}(2(n-1))!}{2^{2n-1}n!(n-1)!} = \dfrac{1}{n}\dfrac{(2(n-1))!}{(n-1)!(n-1)!} = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 2 : S_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}}$

8) *Le rayon de convergence de $\sum S_n x^n$ semble être $\frac{1}{4}$, donc pour $x=1$ la série a peu de chances de converger.*

Pour $n \geqslant 2$, $S_n > 0$ et

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n(2n)!(n-1)!^2}{(n+1)n!^2(2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)}{(n+1)n} \sim \frac{4n}{n} = 4$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_{n+1}}{S_n} = 4 > 1$.

Conclusion : $\boxed{\text{D'après D'Alembert, la série } \sum S_n \text{ diverge}}$

9) a) *C_1 et C_2 sont donnés par l'énoncé. Vu la dernière question, on peut vérifier ses calculs avec $C_n = S_{n+1}$.*

- $C_1 = \mathrm{Card}\,\{AB\} = 1$
- $C_2 = \mathrm{Card}\,\{AABB, ABAB\} = 2$
- $C_3 = \mathrm{Card}\,\{AAABBB, AABABB, AABBAB, ABAABB, ABABAB\} = 5$
- $C_4 = \mathrm{Card}\,\{...\} = 14$.

b) *Cette question est nettement plus délicate que l'ensemble des autres questions du sujet.*

Un mot de Dyck commence nécessairement par un A et donc finit par un B.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des mots de Dyck de longueur $2n$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons

$$\mathscr{C}_n = \bigcup_{k=1}^{n} \mathscr{C}_{k-1} \times \mathscr{C}_{n-k}$$

Soit $m \in \mathscr{C}_n$ un mot de Dyck de longueur $2n$. On numérote les lettres de m de 0 à $2n-1$. En utilisant les mêmes notations que Python, si $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2n$, on note $m[i:j]$ le mot constitué des lettres de m d'indices i à $j-1$.

Considérons le plus petit entier $i > 0$ tel que $m[:i]$ soit un mot de Dyck. Cet entier est nécessairement pair, notons $k(m) \in [\![1, n]\!]$ tel que $i = 2k(m)$. Exemples :

- $m = AABBAB$: $m[:i] = AABB$ et $k(m) = 2$.
- $m = ABABAB$: $m[:i] = AB$ et $k(m) = 1$.

- $m = AAABBB$: $m[:i] = m$ et $k(m) = 3$.

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons

$$\mathscr{C}_{n,k} = \{m \in \mathscr{C}_n \mid k(m) = k\}$$

Par construction, pour $n - k > 0$, l'application suivante est bijective :

$$\begin{cases} \mathscr{C}_{n,k} & \to & \mathscr{C}_{k,k} \times \mathscr{C}_{n-k} \\ m & \mapsto & (m[:2k], m[2k:]) \end{cases}$$

Lorsque l'on dénombre les lettres de gauche à droite, le mot $m\mathscr{C}_{k,k}$ a toujours strictement plus de A que de B, par construction de $k(m) = k$. On peut donc enlever le A initial et le B final en conservant un mot de Dyck (mais qui n'est plus « strict ») : $m[1:-1]$ est encore un mot de Dyck, mais de longueur $2(k-1)$.

Nous venons de montrer que $\varphi : \mathscr{C}_{k,k} \to \mathscr{C}_{k-1}$ définie par $\varphi(m) = m[1:-1]$ est bien définie. Elle est bijective, d'application réciproque $\psi(m') = "A" + m + "B"$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_{n,k}) & = & \mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_{k,k} \times \mathscr{C}_{n-k}) \\ & = & \mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_{k,k}) \times \mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_{n-k}) \\ & = & \mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_{k-1}) \times \mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_{n-k}) \\ & = & C_{k-1}C_{n-k} \end{array}$$

Comme $\mathscr{C}_n = \bigcup_{k=1}^{n} \mathscr{C}_{n,k}$, où l'union est disjointe, il vient $C_n = C_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1}C_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$ la dernière égalité car $C_0 = 1$ par convention.

Ainsi, $\boxed{\text{Pour tout entier } n \geqslant 1 : C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}}$

c) Montrons par récurrence forte que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad C_n = S_{n+1}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: par convention $C_0 = 1$, et $S_1 = 1$ d'après 6. Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{(\forall k \in [\![0, n]\!]\ \mathcal{H}_k) \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie pour tout $k \leqslant n$.

$$\begin{array}{rcll} C_{n+1} & = & \sum_{k=1}^{n+1} C_{k-1}C_{n+1-k} & \text{(d'après b)} \\ & = & \sum_{k=1}^{n+1} S_k S_{n+2-k} & (\mathcal{H}_k \text{ et } \mathcal{H}_{n-k}) \\ & = & S_{n+2} & \text{(d'après 6)} \end{array}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad C_n = S_{n+1}}$

En conclusion, d'après 7, $\boxed{C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$

FIN DE L'ÉPREUVE