Épreuve de Mathématiques 6

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Tracer la conique d'équation :

$$x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$$

On placera toutes les droites utiles au tracé : axes, éventuelles asymptotes, tangentes aux points remarquables. Pour information, $\sqrt{3/7} \simeq 0{,}65$.

Exercice 2

Donnez les éléments propres des endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ de matrices respectives, dans la base canonique :

1) $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

2) $M = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

Exercice 3

1) Étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$.

2) Montrer que la fonction qui, à tout réel t, associe e^{-t^2}, est développable en série entière sur un domaine $\mathscr{D}$ que l'on précisera, et donner ce développement.

3) Montrer que :

$$\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

4) Pour tout entier naturel n, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$. On admet le résultat suivant :

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}$$

a) Proposer, uniquement avec les données fournies par le problème, une méthode permettant de déterminer une valeur numérique approchée de $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ avec une précision $\varepsilon > 0$ donnée.

b) Donner un nombre rationnel r qui soit une valeur numérique approchée de $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ à 10^{-3} près (r pourra être laissé sous forme de somme de fractions : il n'est pas demandé d'exprimer r sous forme de fraction irréductible ni d'en donner une valeur numérique approchée).

Exercice 4

1) Soit x un réel tel que : $|x| \leqslant \frac{1}{4}$. Exprimer, en fonction de x, les deux solutions $\mathcal{Y}_1$ et $\mathcal{Y}_2$ de l'équation :

$$\mathcal{Y}^2 - \mathcal{Y} + x = 0$$

2) Donner le domaine de définition $\mathcal{I}_\mathcal{Y}$ de la fonction f qui, à tout réel x de $\mathcal{I}_\mathcal{Y}$, associe :

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}$$

3) Pour tout réel non nul α, rappeler le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel x de $]-1, 1[$, associe $(1 + x)^\alpha$.

4) Donner le développement en série entière de la fonction f, en l'écrivant sous la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n \quad , \quad \forall x \in \mathcal{D}_S$$

où $\mathcal{D}_S$ est un domaine de $\mathbb{R}$ à préciser. On donnera la valeur de S_0, et on exprimera les coefficients S_n, $n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de n, sous forme de produit.

5) Rappeler la formule donnant le produit de Cauchy de deux séries entières. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série produit ?

6) À l'aide de la question 1, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \, S_{n-k} \qquad (\star)$$

7) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$: $S_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$, où $\binom{2n-2}{n-1}$ est le coefficient binomial « $n - 1$ parmi $2n - 2$ ».

8) Étudier la convergence de la série de terme général S_n.

9) On appelle « mot de Dyck » une chaîne de $2n$ caractères, $n \in \mathbb{N}^*$, formée de n lettres A et n lettres B, telle que, lorsque l'on dénombre les lettres de gauche à droite, en s'arrêtant à une lettre du mot, le nombre de A soit toujours supérieur ou égal au nombre de B. Ainsi, le seul mot de Dyck de longueur 2 est : AB. Les mots de Dyck de longueur 4 sont : $AABB$ et $ABAB$. $ABAABB$ et $AAABBB$ sont des mots de Dyck, alors que BA ou $AABBBA$ n'en sont pas.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par C_n le nombre de mots de Dyck de $2n$ lettres.

- **a)** Calculer C_1, C_2, C_3, C_4.
- **b)** On pose : $C_0 = 1$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $C_n = \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \, C_{n-k}$.
- **c)** Montrer que, pour tout entier naturel n, $C_n = S_{n+1}$, et conclure.

Cet exercice développe des résultats liés aux nombres de Catalan d'ordre n, S_{n+1} ou C_n ($n \in \mathbb{N}$), qui sont couramment utilisés en modélisation numérique (éléments finis). Le domaine géométrique auquel on s'intéresse est discrétisé et peut être approché par une surface polygonale par morceaux. Pour obtenir une bonne approximation géométrique, on divise chaque polygone en triangles. Le nombre de configurations possibles pour trianguler un polygone convexe à $n + 2$ sommets est donné par le nombre de Catalan d'ordre n.

FIN DE L'ÉPREUVE