Épreuve de Mathématiques 6

Correction

Exercice 1 (d'après CCP MP 2015)

1) Cours.

2) **a)** $(A|A') = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} aa'+bb' & \star \\ \star & cc'+dd' \end{pmatrix} = aa'+bb'+cc'+dd'$.

On en profite, évidemment, pour vérifier les formules du 1).

b) En posant $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, comme

$$\mathscr{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid (a,c,d) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \operatorname{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{22})$$

la famille $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{22})$ engendre $\mathscr{T}$.
De plus, $\mathscr{B}$ est une partie de la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, donc $\mathscr{B}$ est libre et orthonormée pour le produit scalaire canonique (ou bien par un simple calcul des produits scalaires).
Ainsi, $\boxed{\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{22}) \text{ est une base orthonormée de } \mathscr{T}}$
Déterminons $\mathscr{T}^\perp$:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{T}^\perp & \implies \forall A' \in \mathscr{T}, (A|A') = 0 \\ & \implies (A|A') = a^2 + c^2 + d^2 = 0 \qquad \text{(en posant } A' = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix}\text{)} \\ & \implies a = c = d = 0 \\ & \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = bE_{21} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{T}^\perp \subset \operatorname{Vect}(E_{21})$.
Réciproquement, $\operatorname{Vect}(E_{21}) \subset \mathscr{T}^\perp$. Donc

$$\boxed{\mathscr{T}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid (a,c,d) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \operatorname{Vect}(E_{21})}$$

c) Soit p la projection orthogonale sur $\mathscr{T}$. Comme $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{22})$ est une base orthonormée de $\mathscr{T}$ (d'après 2)b)),

$$p(A) = (A|E_{11})E_{11} + (A|E_{12})E_{12} + (A|E_{22})E_{22}$$

Donc $\boxed{p(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$

D'après le théorème sur la distance entre un point et un sous-espace vectoriel,

$$\mathrm{d}(A, \mathscr{T}) = \|A - p(A)\|$$

Or $A - p(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, donc

$$\boxed{\mathrm{d}(A, \mathscr{T}) = 3}$$

d) Comme p est la projection orthogonale sur $\mathscr{T}$, $\mathrm{id}_E - p$ est la projection orthogonale sur $\mathscr{T}^\perp$. Ainsi

$$\mathrm{d}(A, \mathscr{T}^\perp) = \|A - (A - p(A))\| = \|p(A)\|$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{d}(A, \mathscr{T}^\perp) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21}}$

3) **a)** Soit p la projection orthogonale sur H. Par construction, $q = \mathrm{id}_E - p$ est la projection orthogonale sur $H^\perp = \mathrm{Vect}\,(u)$. Donc, d'après le théorème de la distance à un sous-espace vectoriel,

$$\mathrm{d}(x, H) = \|x - p(x)\| = \|q(x)\|$$

Or, comme $e_1 = \dfrac{u}{\|u\|}$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}\,(u)$,

$$q(x) = (x|e_1)e_1 = \frac{(x|u)}{\|u\|^2} u$$

Finalement,

$$\boxed{\mathrm{d}(x, H) = \|\frac{(x|u)}{\|u\|^2} u\| = \frac{|(x|u)|}{\|u\|}}$$

Un calcul d'homogénéité permet de contrôler un peu : $(x|u)$ est homogène à une distance au carré, et $\|u\|$ à une distance, donc on trouve une distance.

b) D'après le cours, Tr est une forme linéaire non nulle. Donc son noyau $\boxed{H = \mathrm{Ker\ Tr}\ \text{est un hyperplan}}$

Déterminer $H^\perp$ est une question a priori un peu délicate : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est vaste. Mais il ne faut pas perdre de vue qu'on cherche un sous-espace vectoriel de dimension 1 : donc trouver une vecteur (i.e. une matrice) non nul suffira.

On remarque que,

$$\forall M \in H = \mathrm{Ker\ Tr}\,, \qquad (I_n|M) = \mathrm{Tr}\,({}^t I_n M) = \mathrm{Tr}\ M = 0$$

Donc $I_n \in H^\perp$, puis $\mathrm{Vect}\ I_n \subset H^\perp$.
De plus, comme H est un hyperplan, $\dim H^\perp = \dim E - \dim H = 1$.
Ainsi, par inclusion et égalité des dimensions, $\boxed{H^\perp = \mathrm{Vect}\ I_n}$

c) D'après 3)b), $H = H^{\perp\perp} = (\mathrm{Vect}\ I_n)^\perp$, donc d'après 3)a), avec $u = I_n$,

$$(M, H) = \frac{|(M|u)|}{\|u\|} = \frac{|(M|I_n)|}{\|I_n\|} = \frac{|(M|u)|}{\|u\|}$$

Or $(M|I_n) = \mathrm{Tr}\,(M)$ et $\|I_n\| = \sqrt{\mathrm{Tr}\,({}^t I_n I_n)} = \sqrt{n}$, d'où

$$\boxed{\mathrm{d}(M, H) = \frac{|\mathrm{Tr}\ M|}{\sqrt{n}}}$$

Exercice 2

- f_2 est une isométrie : La matrice M_2 est orthogonale :

$${}^t M_2 M_2 = I_3$$

Puis on vérifie que ${}^t M \neq M$, donc que ce n'est pas une symétrie.

- f_2 est une rotation : De plus, $\det M_2 = \ldots$ (calculs)$\ldots = 1$, donc, par définition, f_2 est une rotation.

- Éléments caractéristiques : Notons $E_1 = \text{Ker}\,(f_2 - \text{id}\,)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Comme $f_2 \neq \text{id}\,$, $\dim E_2 = 1$ (cf. la forme réduite d'une matrice de rotation). Il suffit donc de trouver un vecteur non nul pour déterminer E_1 :

$$M_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\sqrt{6} + \sqrt{6} \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut aussi calculer E_1 comme d'habitude. C'est juste l'occasion de montrer une autre façon de faire.

Donc $E_1 = \text{Vect}\,(0, 1, 1)$ est l'axe de la rotation f_2.

De plus, si on note θ l'angle de la rotation, $\text{Tr } M_2 = 1 + 2\cos\theta = 0$ donc $\theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}$.

Si l'axe est orienté par $\omega = (0, 1, 1)$, le signe de θ est donné par le signe du déterminant $\det(\omega, x, f_2(x))$ où x est un vecteur qui n'est pas sur l'axe, par exemple $x = (0, 1, 0)$ *(moins il y a de racines, mieux on se porte)*.

$$\det(\omega, x, f_2(x)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{6} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\sqrt{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{6} > 0$$

Donc $\theta > 0$.

Conclusion : $\boxed{f_2 \text{ est la rotation d'axe } E_1 = \text{Vect}\,(0,1,1) \text{ et d'angle } \theta = \dfrac{2\pi}{3}.}$

Exercice 3 (BCE EMLyon 2015)

Partie 1 (Étude d'endomorphisme)

1)
- $E \subset \mathbb{R}_4[X]$ par définition.
- $P = 0$ admet 0 et 4 pour racines donc $0 \in E$: $E \neq 0$.
- Soit P, $Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $P(0) = Q(0) = 0$,

$$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(O) = 0$$

  De même en $x = 4$. Donc $\lambda P + Q \in E$.

  Donc E est stable par combinaison linéaire.

Conclusion : $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel } \mathbb{R}_4[X]}$

2) Nous allons montrer que φ est une application linéaire, de $\mathbb{R}_2[X]$ dans E, injective et surjective.

Avant de vous lancer tête baissée, faites la liste de ce que vous devez montrer !

- Linéarité : Soit P, $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(\lambda P + Q) = W(\lambda P + Q) = \lambda WP + WQ = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$

  Donc φ est linéaire.

- À valeurs dans E : Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$.
  Comme $\deg(\varphi(Q)) = \deg W + \deg Q \leqslant 2 + 2 = 4$, $\varphi(Q) \in \mathbb{R}_4[X]$.
  De plus $\varphi(Q)(0) = \varphi(Q)(4) = 0$ car $W(0) = W(4) = 0$.
  Donc $\varphi(Q) \in E$.
  Conclusion : φ est à valeurs dans E.

- Injectivité : Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$Q \in \text{Ker } \varphi \Longrightarrow \varphi(Q) = WQ = 0 \Longrightarrow Q = 0$$

  Car $W \neq 0$. Donc $\text{Ker } \varphi = \{0\}$.
  Conclusion : φ est injective.

- Surjectivité : Soit $P \in E$, montrons que $P \in \text{Im } \varphi$.
  Par définition de E, P admet 0 et 4 pour racines, donc P s'écrit
  $$P = X(X-4)Q = WQ$$
  De plus, $\deg P \leqslant 4$ donc $\deg Q \leqslant 2$. Ainsi,
  $$P = \varphi(Q)$$
  Conclusion : φ est surjective. *Ici ce n'est pas un endomorphisme, et on ne connaît pas dimension de E – cf. question suivante. Donc on ne peut pas conclure la bijectivité grâce à la dimension.*

Ainsi, φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans E, injective et surjective (donc bijective).
Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_2[X] \text{ sur } E}$

3) L'image d'une base par un isomorphisme est une base.
Ainsi, en considérant la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, $(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2))$ est une base de E.
Conclusion : $\boxed{(W, WX, WX^2) \text{ est une base de } E, \text{ et } \dim E = 3}$

4) **a)**
- Soit $Q \in \mathbb{R}_2[X]$.
  $$\deg(\Delta(Q)) \leqslant \max(\deg(Q(X+1)), \deg(Q(X))) \leqslant 2$$
  D'où $\Delta(Q) \in \mathbb{R}_2[X]$.
- Soit P, $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  $$\Delta(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P(X) + Q(X)) = \lambda \Delta(P) + \Delta(Q)$$
  Donc Δ est linéaire.

Conclusion : $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X]}$

b) Soit $Q = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
$$\begin{array}{rcl} \Delta(Q) & = & Q(X+1) - Q(X) \\ & = & a(X^2 + 2X + 1) + bX + b + c - (aX^2 + bX + c) \\ & = & aX^2 + 2aX + a + bX + b + c - aX^2 - bX - c \\ & = & 2aX + a + b \end{array}$$
Étudions les différents cas :
- Si $\deg Q = 2$, c'est-à-dire $a \neq 0$, $\deg \Delta(Q) = 1$.
- Si $\deg Q = 1$, c'est-à-dire $a = 0$ et $b \neq 0$, $\deg \Delta(Q) = 0$.
- Si $\deg Q \leqslant 0$, c'est-à-dire $a = b = 0$, $\Delta(Q) = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } Q \in \mathbb{R}_2[X], \deg \Delta(Q) = (\deg Q) - 1}$
Avec la convention $\deg 0 < 0$.

c)
- Noyau : D'après le calcul ci-dessus,
  $$\boxed{\text{Ker } \Delta = \mathbb{R}_0[X]}$$
- Image : D'après le calcul ci-dessus,
  $$\text{Im } \Delta \subset \mathbb{R}_1[X]$$
  De plus, d'après le théorème du rang,
  $$\dim \text{Im } \Delta = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \text{Ker } \Delta = 3 - 1 = \dim \mathbb{R}_1[X]$$
  Donc par inclusion et égalité des dimensions, $\boxed{\text{Im } \Delta = \mathbb{R}_1[X]}$

d) D'après 4)b), pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\deg \Delta(Q) = (\deg Q) - 1$.
Donc pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\deg(\Delta^3(Q)) = (\deg Q) - 3 < 0$, c'est-à-dire $\Delta^3(Q) = 0$.
Conclusion : $\boxed{\Delta^3 = 0}$

5) **a)** Comme $f^3 = \varphi \circ \Delta \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \Delta \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \Delta \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \Delta^3 \circ \varphi^{-1}$, et que $\Delta^3 = 0$ d'après 4)d), il vient

$$\boxed{f^3 = 0}$$

b) Soit $P \in E$.

$$\begin{aligned}
P \in \text{Ker } f &\Longrightarrow f(P) = \varphi \circ \Delta \circ \varphi^{-1}(P) = 0 \\
&\Longrightarrow \varphi(\Delta(\varphi^{-1}(P))) = 0 \\
&\Longrightarrow \Delta(\varphi^{-1}(P)) = 0 && \text{(Car } \varphi \text{ bijective)} \\
&\Longrightarrow \varphi^{-1}(P) \in \text{Ker } \Delta = \mathbb{R}_1[X] && \text{(D'après 4)c))} \\
&\Longrightarrow P \in \varphi(\mathbb{R}_1[X]) = \{WQ \,|\, Q \in \mathbb{R}_1[X]\}
\end{aligned}$$

Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.

c) Démontrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci. Donner une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.

d) Est-ce que f est diagonalisable ?

Partie 2 (Étude d'un produit scalaire)

On considère l'application $< .,. >$ de $\mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X], \qquad < P_1, P_2 >= \sum_{k=0}^{4} P_1(k) P_2(k)$$

1) Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.

2) On munit désormais $\mathbb{R}_4[X]$ de ce produit scalaire, et de la norme $\|.\|$ associée.
On considère les polynômes suivants :

$$L_1 = (X-2)(X-3), \quad L_2 = (X-1)(X-3), \quad L_3 = (X-1)(X-2)$$

Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3) **a)** Exprimer, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) en fonction de $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$.

b) Exprimer, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $\Delta(L_i)$ sur la base (L_1, L_2, L_3) et en déduire que la matrice de l'endomorphisme Δ dans la base (L_1, L_2, L_3) est

$$\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$$

4) On note, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $M_i = WL_i$.

a) Montrer que, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $M_i(i) \neq 0$.
On note alors, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $N_i = \dfrac{1}{M_i(i)} M_i$.

b) Montrer que (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormée du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}_4[X]$.

5) Déterminer la matrice de l'application linéaire φ dans les bases (L_1, L_2, L_3) au départ et (N_1, N_2, N_3) à l'arrivée.

6) Déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base (N_1, N_2, N_3) de E.

7) On note, pour tout $P \in \mathbb{R}_4[X]$, $u(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} P(i) N_i$.

a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

b) Montrer

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X] \quad \forall j \in \{1,2,3\}, \qquad < P - u(P), N_j >= 0$$

c) En déduire que u est la projection orthogonale sur E.

d) déterminer le projeté orthogonal de $Q = X^2(X-2)(X-3)$ sur E.

Exercice 4

Soit E un espace euclidien, $a \in E$ unitaire, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in E$ on pose

$$f_\alpha(x) = x + \alpha < x, a > a$$

1) Vérifier que f est un endomorphisme de E.

2) Montrer que pour tout $\beta \in \mathbb{R}^*$, $f_\alpha \circ f_\beta = f_\beta \circ f_\alpha$.

3) Montrer que,

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad < x, f_\alpha(y) >=< f_\alpha(x), y >$$

4) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par f, alors $F^\perp$ est également stable par f.

5) Montrer que a est un vecteur propre de f.

6) Montrer que 1 est une valeur propre de f. Quel est le sous-espace propre associé ?

7) L'endomorphisme f_α est-il diagonalisable ?

8) Pour quelles valeurs de α f est-il une isométrie ? Caractériser dans ce cas cet endomorphisme.

FIN DE L'ÉPREUVE