Épreuve de Mathématiques 6

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On considère $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, muni du produit scalaire canonique défini par

$$\forall (A,B) \in E^2 \qquad (A|B) = \mathrm{Tr}\left({}^t AB\right)$$

1) Montrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur E.

2) Dans cette question, et dans cette question seulement, $n = 2$.

- **a)** Expliciter $(A|A')$ pour $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$
- **b)** On note $\mathscr{T}$ le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures de $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une base orthonormée de $\mathscr{T}$ et de son orthogonal $\mathscr{T}^\perp$ (justifier).
- **c)** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, déterminer le projeté orthogonal de la matrice A sur $\mathscr{T}$, ainsi que la distance de la matrice A à $\mathscr{T}$.
- **d)** Déterminer la distance de la matrice A à $\mathscr{T}^\perp$.

3) On revient au cas n quelconque. Cas des hyperplans.

- **a)** Soit u un vecteur non nul de E et H l'hyperplan de E orthogonal à u, c'est-à-dire $H = (\mathrm{Vect}\,\{u\})^\perp$. Exprimer pour $x \in E$, la distance $\mathrm{d}(x, H)$ en fonction de $(x|u)$ et de $\|u\|$. On pourra regarder la projection sur $H^\perp$.
- **b)** On note H l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle. Justifier que H est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $H^\perp$.
- **c)** Si M est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer la distance $\mathrm{d}(M, H)$.

Exercice 2

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice dans la base canonique

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Décrire f.

Exercice 3

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à k.
On définit l'ensemble $E = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = P(4) = 0\}$ et le polynôme $W = X(X-4)$.

Partie 1 (Étude d'endomorphisme)

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$.

2) Pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $\varphi(Q) = WQ$.
Montrer que l'application φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur E.

3) En déduire une base de E et la dimension de E.

4) Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on considère le polynôme $\Delta(Q)$ défini par :

$$\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X)$$

Ainsi, par exemple, si $Q = X^2 - 3X + 5$, alors

$$\Delta(Q) = ((X+1)^2 - 3(X+1) + 5) - (X^2 - 3X + 5) = 2X - 2$$

a) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

b) Déterminer, pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, le degré de $\Delta(Q)$ en fonction du degré de Q.

c) Déterminer le noyau et l'image de Δ.

d) Établir $\Delta \circ \Delta \circ \Delta = 0$. On pourra noter $\Delta^3 = \Delta \circ \Delta \circ \Delta$.

5) On définit l'endomorphisme f de E suivant : $f = \varphi \circ \Delta \circ \varphi^{-1}$.

a) Montrer que $f^3 = 0$

b) Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f.

c) Démontrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci. Donner une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.

d) Est-ce que f est diagonalisable ?

Partie 2 (Étude d'un produit scalaire)

On considère l'application $< .\,, . >$ de $\mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P_1, P_2) \in \mathbb{R}_4[X] \times \mathbb{R}_4[X], \qquad < P_1, P_2 > = \sum_{k=0}^{4} P_1(k) P_2(k)$$

1) Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$.

2) On munit désormais $\mathbb{R}_4[X]$ de ce produit scalaire, et de la norme $\|.\|$ associée.
On considère les polynômes suivants :

$$L_1 = (X-2)(X-3), \quad L_2 = (X-1)(X-3), \quad L_3 = (X-1)(X-2)$$

Montrer que la famille (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3) **a)** Exprimer, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) en fonction de $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$.

b) Exprimer, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $\Delta(L_i)$ sur la base (L_1, L_2, L_3) et en déduire que la matrice de l'endomorphisme Δ dans la base (L_1, L_2, L_3) est

$$\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3/2 & 2 \end{pmatrix}$$

4) On note, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, $M_i = WL_i$.

a) Montrer que, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $M_i(i) \neq 0$.

On note alors, pour tout $i \in \{1,2,3\}$, $N_i = \dfrac{1}{M_i(i)} M_i$.

b) Montrer que (N_1, N_2, N_3) est une base orthonormée du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}_4[X]$.

5) Déterminer la matrice de l'application linéaire φ dans les bases (L_1, L_2, L_3) au départ et (N_1, N_2, N_3) à l'arrivée.

6) Déterminer la matrice de l'endomorphisme f dans la base (N_1, N_2, N_3) de E.

7) On note, pour tout $P \in \mathbb{R}_4[X]$, $u(P) = \sum_{i=1}^{3} P(i) N_i$.

a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

b) Montrer

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X] \quad \forall j \in \{1,2,3\}, \qquad < P - u(P), N_j >= 0$$

c) En déduire que u est la projection orthogonale sur E.

d) déterminer le projeté orthogonal de $Q = X^2(X-2)(X-3)$ sur E.

Exercice 4

Soit E un espace euclidien, $a \in E$ unitaire, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in E$ on pose

$$f_\alpha(x) = x + \alpha < x, a > a$$

1) Vérifier que f est un endomorphisme de E.

2) Montrer que pour tout $\beta \in \mathbb{R}^*$, $f_\alpha \circ f_\beta = f_\beta \circ f_\alpha$.

3) Montrer que,

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad < x, f_\alpha(y) >=< f_\alpha(x), y >$$

4) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par f, alors $F^\perp$ est également stable par f.

5) Montrer que a est un vecteur propre de f.

6) Montrer que 1 est une valeur propre de f. Quel est le sous-espace propre associé ?

7) L'endomorphisme f_α est-il diagonalisable ?

8) Pour quelles valeurs de α f est-il une isométrie ? Caractériser dans ce cas cet endomorphisme.

FIN DE L'ÉPREUVE