# Épreuve de Mathématiques 5

Correction

---

## Exercice 1

Montrer que l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ suivante est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.

$$\forall (P,Q) \in E^2, \qquad \varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

## Exercice 2 (PT 2015 B)

Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on considère la courbe $\Gamma$ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) &= \dfrac{1}{t^2} + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}_-^*$$

Pour tout $t < 0$, on désigne par $M_t$ le point de $\Gamma$ de paramètre $t$.

**1)** **a)** Justifier qu'une représentation paramétrique de la normale à $\Gamma$ au point $M_t$, $t \in \mathbb{R}_-^*$ est

$$\begin{cases} x_t(u) &= t^2 + \dfrac{2}{t} + u \\ y_t(u) &= \dfrac{1}{t^2} + 2t - tu \end{cases} \qquad u \in \mathbb{R}$$

**b)** **En déduire** une représentation paramétrique de la développée de $\Gamma$.

**c)** Utiliser ce résultat pour donner le centre et le rayon du cercle de courbure de $\Gamma$ au point $M_{-1}$ de paramètre $t = -1$.

**2)** Soit $\Sigma$ le cercle de centre $\Omega$ de coordonnées $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$. On dit que $\Sigma$ et $\Gamma$ sont tangents en un point $A$ si

- $A \in \Sigma \cap \Gamma$ ;
- la tangente à $\Sigma$ en $A$ et la tangente à $\Gamma$ en $A$ sont confondues.

**a)** Exprimer $b$ et $r$ en fonction de $a$ pour que $\Sigma$ et $\Gamma$ soient tangents en $M_{-1}$.

**b)** Dans ces conditions, donner une équation de $\Sigma$ sous la forme $f_a(x,y) = 0$ ne dépendant que du paramètre $a$.

**c)** Effectuer les développements limités de $x(t)$ et $y(t)$ à l'ordre 3 en $t = -1$. On donne

$$f_a(x(t), y(t)) = (28 - 4a)(t+1)^2 + (28 - 4a)(t+1)^3 + o((t+1)^3)$$

**d)** Déterminer $a$ pour qu'au voisinage de $t = -1$, $f_a(x(t), y(t)) = o((t+1)^3)$.
Quelle(s) remarque(s) peut-on faire concernant $\Omega$ et $r$ ?

## Exercice 3 (PT 2015 B)

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sera noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ et la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ sera notée $\|\overrightarrow{u}\|$.

*C'est de la « géométrie élémentaire », pour quasiment toutes les questions le chapitre algèbre bilinéaire en cours est inutile. Faites, au moins au brouillon, des dessins (évidemment).*

**1)** Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre $O$ et de rayon $R > 0$ et $I$ un point du plan. Une droite $\mathscr{D}$ passant par $I$ et sécante à $\mathscr{C}$ coupe $\mathscr{C}$ en $A$ et $B$. On note $A'$ le symétrique de $A$ par rapport à $O$.

**a)** Démontrer que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'} = IO^2 - R^2$.

On remarque que la valeur de $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$ est indépendante de la droite $\mathscr{D}$ sécante à $\mathscr{C}$ choisie. On note $\sigma_{\mathscr{C}}(I)$ ce nombre.

**b)** Quelle information le signe de $\sigma_{\mathscr{C}}(I)$ donne-t-il sur la position du point $I$ ?

**c)** Soit $I$ un point du plan tel que $\sigma_{\mathscr{C}}(I) \geqslant 0$, $\Lambda$ l'ensemble des points $M$ du plan vérifiant $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{OM} = 0$ et $T$ un point de $\Lambda \cap \mathscr{C}$.

**i)** Quelle est la nature de $\Lambda$ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

**ii)** Démontrer que $\sigma_{\mathscr{C}}(I) = IT^2$.

**2)** Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres respectifs $O$ et $O'$, distincts, de rayons respectifs $R > 0$ et $R' > 0$. On désigne par $\Omega$ le milieu du segment $[OO']$ et par $\Delta$ l'ensemble des points $I$ du plan vérifiant $\sigma_{\mathscr{C}}(I) = \sigma_{\mathscr{C}'}(I)$.

**a)** Démontrer que

$$\sigma_{\mathscr{C}}(I) = \sigma_{\mathscr{C}'}(I) \iff 2\overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{\Omega I} = R^2 - R'^2$$

**b)** **i)** Soit $I_1$ et $I_2$ deux points distincts de $\Delta$. Démontrer que les droites $(I_1I_2)$ et $(OO')$ sont orthogonales.

**ii)** Déterminer un point $I_0$ appartenant à $\Delta$ et $(OO')$.

**iii)** En déduire la nature de $\Delta$.

**c)** Que dire de plus sur $\Delta$ lorsque $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants ou tangents ? Ou lorsque les deux cercles ont le même rayon ?

**d)** Dans cette question, l'unité de longueur est le centimètre. On prend $OO' = 10$, $R = 5$, $R' = 3$. Tracer $\Delta$.

**3)** **a)** Soit $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés du plan, et $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle $ABC$. Soit $I$ un point de la droite $(AB)$ distinct de $A$ et $B$, et $D$ un point de la droite $(IC)$ vérifiant $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$.

Démontrer que $D$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.

**b)** On se place désormais dans le plan complexe. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour affixe $z \in \mathbb{C}$, et le vecteur $\overrightarrow{v}$ a pour affixe $z' \in \mathbb{C}$.

**i)** Rappeler en la justifiant la relation entre $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|$, $\|\overrightarrow{u}\|$, $\|\overrightarrow{v}\|$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

**ii)** En déduire que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \Re(z\overline{z'})$. ($\Re$ désigne la partie réelle)

**iii)** Soit $A$, $B$, $C$, $D$ et $I$ les points d'affixes complexes respectives

$$z_A = -3 - i, \quad z_B = 5i, \quad z_C = -1 - 7i, \quad z_D = 14 - 2i, \quad z_I = -7 - 9i$$

Démontrer que $A$, $B$, $C$ et $D$ sont cocycliques (c'est-à-dire : sur un même cercle).

$\sigma_{\mathscr{C}}(I)$ est la puissance du point $I$ par rapport au cercle $\mathscr{C}$ et $\Delta$ est l'axe radical des deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Ces deux objets, avec entre autre la notion de division harmonique, conduiront au XIX$^{e}$ siècle à la géométrie projective.

## Exercice 4 (PT 2014 B)

**1)** Étude de $\Gamma_A$ dans le cas où $a = b = 9$.

**a)** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left\{\begin{array}{lllllll} x(-t) & = & -t^3 + 3t^2 + 9t & = & -\left(t^3 - 3t^2 - 9t\right) & = & -y(t) \\ y(-t) & = & -t^3 - 3t^2 + 9t & = & -\left(t^3 + 3t^2 - 9t\right) & = & -x(t) \end{array}\right.$

Conclusion : $\boxed{\Gamma_A \text{ est symétrique par rapport à la droite d'équation } y = -x}$

**b)** $x$ et $y$ sont des polynômes donc dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x'(t) &= 3t^2 + 6t - 9 &= 3(t-1)(t+3) \\ y'(t) &= 3t^2 - 6t - 9 &= 3(t+1)(t-3) \end{cases}$$

*Non, la recherche des racines d'un trinôme puis du signe de celui-ci n'est pas* **la** *question centrale de l'épreuve : faites vite (et juste).*

| $t$ | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x$ | $0$ | $\searrow$ | $-5$ | $\nearrow$ | $27$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y'(t)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $0$ | $\searrow$ | $-11$ | $\searrow$ | $-27$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Donc la courbe (pour $t \geqslant 0$) admet une tangente verticale en $M(1)$ de coordonnées $(-5, -11)$ et une tangente horizontale en $M(3)$ de coordonnées $(27, -27)$.

En $M(0) = O$ la tangente a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -9 \\ -9 \end{pmatrix}$ et passe par $O$, c'est donc la première bissectrice d'équation $y = x$.

**c)** $M(t_1)$ est un point double s'il existe $t_2 \neq t_1$ tel que $M(t_1) = M(t_2)$

$$\begin{aligned} M(t_1) = M(t_2) &\iff \begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t_1^3 + 3t_1^2 - 9t_1 = t_2^3 + 3t_2^2 - 9t_2 \\ t_1^3 - 3t_1^2 - 9t_1 = t_2^3 - 3t_2^2 - 9t_2 \end{cases} \qquad \text{puis } L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \begin{cases} t_1^3 + 3t_1^2 - 9t_1 = t_2^3 + 3t_2^2 - 9t_2 \\ -6t_1^2 = -6t_2^2 \end{cases} \qquad \text{or } L_2 \iff t_1 = -t_2 \text{ car } t_1 \neq t_2 \\ &\iff \begin{cases} 2t_1^3 - 18t_1 = 0 \\ t_2 = -t_1 \end{cases} \qquad \text{et } L_1 \iff 2t_1\left(t_1^2 - 9\right) = 0 \end{aligned}$$

Or si $t_1 = 0$, on a $t_2 = -t_1 = t_1$ ce qui est impossible : $t_1 \neq 0$.

Donc $\boxed{\text{le seul point double est } M(3) = M(-3) \text{ de coordonnées } (27, -27)}$

La tangente est horizontale pour $t = 3$ et, par symétrie, est verticale pour $t = -3$.

Ainsi, $\boxed{\text{L'angle entre les deux tangentes de } \dfrac{\pi}{2}}$

**d)** $\Gamma_A$ admet une branche infinie lorsque $t \to +\infty$.

$$\frac{y}{x} \sim \frac{t^3}{t^3} = 1$$

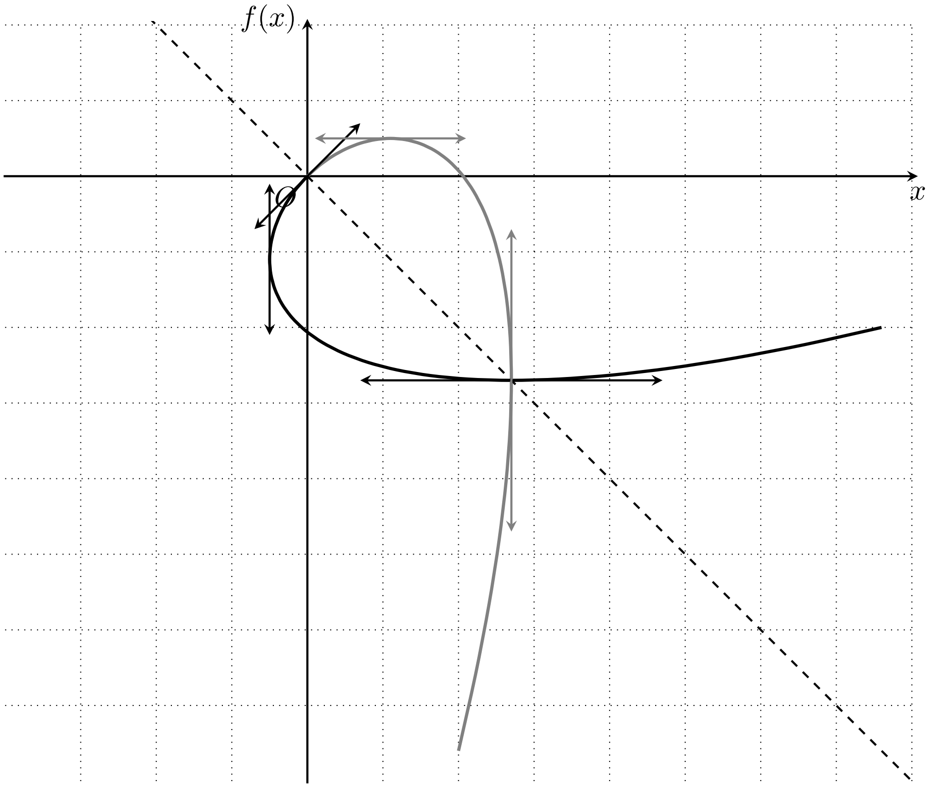
Donc $a = 1$. De plus, $y - x = -6t^2 \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$.

Conclusion : $\boxed{\text{La courbe } \Gamma_A \text{ admet une branche parabolique de direction } y = x.}$

**e)** Tracé :

<u>Indication</u> : *On place les points où l'une des deux dérivées s'annule (i.e. tangente verticale ou horizontale) et la tangente associée, le point double (mais c'est déjà fait), le point $O = M(0)$ (et*

*plus généralement tous les points où l'on nous a demandé explicitement la tangente).*
*Puis on trace en suivant le tableau de variation (en partant par exemple des points* $(-5,-11)$ *et* $(27,-27)$*).*
*On complète ensuite* $\Gamma_A$ *par symétrie.*




**2)** Un point stationnaire (ou singulier) est un point en lequel la vitesse s'annule :

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3t^2 + 6t - a = 0 \\ 3t^2 - 6t - b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3t^2 + 6t - a = 0 \\ -12t - b + a = 0 \end{cases} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

$$\iff \begin{cases} 3\left(\dfrac{a-b}{12}\right)^2 + 6\left(\dfrac{a-b}{12}\right) - a = 0 \\ t = \dfrac{a-b}{12} \end{cases} \qquad \text{(en remplaçant } t \text{ par sa valeur)}$$

Donc $t$ existe $\iff 3(a-b)^2 + 6 \times 12(a-b) - 144a = 0 \iff \boxed{(a-b)^2 - 24(a+b) = 0 : \mathcal{P}}$

**FIN DE L'ÉPREUVE**