Épreuve de Mathématiques 5

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Montrer que l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ suivante est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.

$$\forall (P,Q) \in E^2, \qquad \varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2

Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on considère la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) &= \dfrac{1}{t^2} + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}_-^*$$

Pour tout $t < 0$, on désigne par M_t le point de Γ de paramètre t.

1) **a)** Justifier qu'une représentation paramétrique de la normale à Γ au point M_t, $t \in \mathbb{R}_-^*$ est

$$\begin{cases} x_t(u) &= t^2 + \dfrac{2}{t} + u \\ y_t(u) &= \dfrac{1}{t^2} + 2t - tu \end{cases} \qquad u \in \mathbb{R}$$

b) **En déduire** une représentation paramétrique de la développée de Γ.

c) Utiliser ce résultat pour donner le centre et le rayon du cercle de courbure de Γ au point M_{-1} de paramètre $t = -1$.

2) Soit Σ le cercle de centre Ω de coordonnées $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$. On dit que Σ et Γ sont tangents en un point A si

- $A \in \Sigma \cap \Gamma$;
- la tangente à Σ en A et la tangente à Γ en A sont confondues.

a) Exprimer b et r en fonction de a pour que Σ et Γ soient tangents en M_{-1}.

b) Dans ces conditions, donner une équation de Σ sous la forme $f_a(x,y) = 0$ ne dépendant que du paramètre a.

c) Effectuer les développements limités de $x(t)$ et $y(t)$ à l'ordre 3 en $t = -1$. On donne

$$f_a(x(t), y(t)) = (28 - 4a)(t+1)^2 + (28 - 4a)(t+1)^3 + o((t+1)^3)$$

d) Déterminer a pour qu'au voisinage de $t = -1$, $f_a(x(t), y(t)) = o((t+1)^3)$.
Quelle(s) remarque(s) peut-on faire concernant Ω et r ?

Exercice 3

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sera noté $\vec{u}.\vec{v}$ et la norme du vecteur $\vec{u}$ sera notée $\|\vec{u}\|$.

C'est de la « géométrie élémentaire », pour quasiment toutes les questions le chapitre algèbre bilinéaire en cours est inutile. Faites, au moins au brouillon, des dessins (évidemment).

1) Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et I un point du plan. Une droite $\mathscr{D}$ passant par I et sécante à $\mathscr{C}$ coupe $\mathscr{C}$ en A et B. On note A' le symétrique de A par rapport à O.

- **a)** Démontrer que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'} = IO^2 - R^2$.

  On remarque que la valeur de $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$ est indépendante de la droite $\mathscr{D}$ sécante à $\mathscr{C}$ choisie. On note $\sigma_{\mathscr{C}}(I)$ ce nombre.
- **b)** Quelle information le signe de $\sigma_{\mathscr{C}}(I)$ donne-t-il sur la position du point I ?
- **c)** Soit I un point du plan tel que $\sigma_{\mathscr{C}}(I) \geqslant 0$, Λ l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{OM} = 0$ et T un point de $\Lambda \cap \mathscr{C}$.
  - **i)** Quelle est la nature de Λ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
  - **ii)** Démontrer que $\sigma_{\mathscr{C}}(I) = IT^2$.

2) Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de centres respectifs O et O', distincts, de rayons respectifs $R > 0$ et $R' > 0$. On désigne par Ω le milieu du segment $[OO']$ et par Δ l'ensemble des points I du plan vérifiant $\sigma_{\mathscr{C}}(I) = \sigma_{\mathscr{C}'}(I)$.

- **a)** Démontrer que
$$\sigma_{\mathscr{C}}(I) = \sigma_{\mathscr{C}'}(I) \iff 2\overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{\Omega I} = R^2 - R'^2$$
- **b)**
  - **i)** Soit I_1 et I_2 deux points distincts de Δ. Démontrer que les droites (I_1I_2) et (OO') sont orthogonales.
  - **ii)** Déterminer un point I_0 appartenant à Δ et (OO').
  - **iii)** En déduire la nature de Δ.
- **c)** Que dire de plus sur Δ lorsque $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants ou tangents ? Ou lorsque les deux cercles ont le même rayon ?
- **d)** Dans cette question, l'unité de longueur est le centimètre. On prend $OO' = 10$, $R = 5$, $R' = 3$. Tracer Δ.

3)
- **a)** Soit A, B et C trois points non alignés du plan, et $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Soit I un point de la droite (AB) distinct de A et B, et D un point de la droite (IC) vérifiant $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$.

  Démontrer que D appartient au cercle $\mathscr{C}$.
- **b)** On se place désormais dans le plan complexe. Le vecteur $\vec{u}$ a pour affixe $z \in \mathbb{C}$, et le vecteur $\vec{v}$ a pour affixe $z' \in \mathbb{C}$.
  - **i)** Rappeler en la justifiant la relation entre $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\vec{u}.\vec{v}$.
  - **ii)** En déduire que $\vec{u}.\vec{v} = \Re(z\overline{z'})$. ($\Re$ désigne la partie réelle)
  - **iii)** Soit A, B, C, D et I les points d'affixes complexes respectives
$$z_A = -3 - i, \quad z_B = 5i, \quad z_C = -1 - 7i, \quad z_D = 14 - 2i, \quad z_I = -7 - 9i$$
    Démontrer que A, B, C et D sont cocycliques (c'est-à-dire : sur un même cercle).

$\sigma_{\mathscr{C}}(I)$ est la puissance du point I par rapport au cercle $\mathscr{C}$ et Δ est l'axe radical des deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Ces deux objets, avec entre autre la notion de division harmonique, conduiront au XIX^e siècle à la géométrie projective.

Exercice 4

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère le point A de coordonnées (a, b), où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

À chaque point A du plan, on associe la courbe Γ_A ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = t^3 + 3t^2 - at \\ y(t) = t^3 - 3t^2 - bt \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

1) Étude de Γ_A dans le cas où $a = b = 9$.

- **a)** Montrer queΓ_A possède un axe de symétrie que l'on précisera. On étudiera donc x et y sur $\mathbb{R}_+$.
- **b)** Étudier les variations de x et de y ; on consignera les résultats dans un tableau de variations en précisant les tangentes verticales, horizontales et la tangente au point de paramètre 0.
- **c)** Montrer que Γ_A possède un point double que l'on précisera.
  Indication : *On fera un calcul explicite, en partant de $M(t_1) = M(t_2)$ et en explicitant t_1 et t_2.*
  Déterminer l'angle formé par les deux tangentes à Γ_A au point double.
- **d)** Étudier la branche infinie de la restriction de Γ_A à $\mathbb{R}_+$
- **e)** Tracer Γ_A.

2) On revient au cas général.
Montrer que la courbe Γ_A possède un point stationnaire si et seulement si A appartient à une courbe $\mathcal{P}$ dont on donnera une équation.

FIN DE L'ÉPREUVE