Épreuve de Mathématiques 4

Correction

Exercice 1 (CCP PC 2010)

1) a) Première opération : $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$. Deuxième opération : on sort $(x-4)$ de la première colonne et on développe par rapport à la dernière ligne (ou on utilise la forme triangulaire bloc).

$$\begin{aligned}
\chi_f(x) &= \det(xI_3 - A) \\
&= \begin{vmatrix} x-8 & -4 & 7 \\ 8 & x+4 & -8 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x-4 & -4 & 7 \\ -x+4 & x+4 & -8 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \leftarrow \\
&= (x-4)(x-1)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & x+4 \end{vmatrix} \\
&= (x-4)(x-1)x
\end{aligned}$$

Le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$

b)

- $\underline{E_0 = \text{Ker } A}$: Soit $x \in \mathbb{R}^3$ de matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Résolvons le système $AX = 0$.

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 7L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 8L_3 \end{array} \Bigg| \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1/4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array} \Bigg| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $\begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$. Ainsi $\boxed{E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$

- $\underline{E_1 = \text{Ker}\,(I_3 - A)}$:

Soit $x \in \mathbb{R}^3$ de matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Résolvons le système $(I_3 - A)X = 0$.

$$\begin{pmatrix} -7 & -4 & 7 \\ 8 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \; \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 - 8L_1 \; \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $x_2 = 0$ et $x_3 = x_1$. Ainsi $\boxed{E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$

- $\underline{E_4 = \text{Ker}\,(4I_3 - A)}$:

  Soit $x \in \mathbb{R}^3$ de matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Résolvons le système $(4I_3 - A)X = 0$.

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & 7 \\ 8 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 & \leftarrow & L_1 - 7/3L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + 2L_1 - 2L_3 \\ L_3 & \leftarrow & L_3/3 \end{matrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 & \leftarrow & -L_1/4 \\ & & \\ & & \end{matrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  D'où $x_3 = 0$ et $x_2 = -x_1$. Ainsi $\boxed{E_4 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$

Posons $v_1 = (1, -2, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, -1, 0)$. Par construction,

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

c) La matrice de f^m est A^m dans la base canonique, et D^m dans la base (v_1, v_2, v_3). Donc la formule de changement de base nous donne

$$\boxed{A^m = PD^mP^{-1}}$$

d) D'après les calculs de la question 1b, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculons P^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 & \leftarrow & L_3 \\ L_3 & \leftarrow & L_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = P^{-1}}$$

Ainsi, d'après 1c, $A^m = PD^mP^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix}P^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 2.4^m & 4^m & 1 - 2.4^m \\ -2.4^m & -4^m & 2.4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

On vérifie ses calculs $m = 1$ ($A^1 = A$). Si on veut le faire en $m = 0$ ($A^0 = I_3$), il faut prendre garde au fait que $0^0 = 1$, or on a remplacé 0^m par 0...

e) Soit $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commute avec D, c'est-à-dire telle que $MD = DM$.

$$MD = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 4c_1 \\ 0 & b_2 & 4c_2 \\ 0 & b_3 & 4c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 4a_3 & 4b_3 & 4c_3 \end{pmatrix} = DM$$

Ainsi $a_2 = a_3 = 0$, $b_1 = b_3 = 0$, $c_1 = c_2 = 0$, et $M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$. Réciproquement, si M est diagonale, elle commute avec D.

Conclusion : $\boxed{\text{Les matrices qui commutent avec } D \text{ sont exactement les matrices diagonales}}$

f) Soit $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $H^2 = D$.

$$HD = H.H^2 = H^3 = H^2.H = DH$$

Ainsi $\boxed{H \text{ et } D \text{ commutent}}$

g) Soit H telle que $H^2 = D$. Alors H commute avec D, donc d'après la question 1e, H est diagonale. L'égalité $H^2 = D$ s'écrit donc

$$H^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi $a = 0$, $b = \pm 1$ et $c = \pm 2$. Réciproquement, ces matrices conviennent, donc les matrices H de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$ sont

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Pour déterminer les matrices dans la base canonique de tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$, il suffit d'appliquer la formule de changement de base $\text{Mat}\,(h, \mathscr{B}) = PHP^{-1}$, avec H les quatre matrices précédentes.

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4\varepsilon_2 & 2\varepsilon_2 & -4\varepsilon_2 \\ -4\varepsilon_2 & -2\varepsilon_2 & 4\varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_1 \in \{-1, 1\} \text{ et } \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}}$$

2) **a)** Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}(m) : \quad J^m = 3^{m-1} J$$

est vraie pour tout $m \geqslant 1$.

- <u>$\mathcal{H}_1$</u> est vraie par hypothèse.
- <u>$\mathcal{H}_m \Longrightarrow \mathcal{H}_{m+1}$</u> : Supposons $\mathcal{H}(m)$ vraie. $J^2 = 3J$, donc $J^{m+1} = 3^{m-1} JJ = 3^m J$, donc $\mathcal{H}(m+1)$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall m \geqslant 1 \qquad J^m = 3^{m-1} J}$

b) En termes d'applications linéaires, la question précédente s'écrit $j^m = 3^{m-1} j$ pour tout $m \geqslant 1$. Ainsi, puisque $f = \text{id} + j$ et que j et id commutent, la formule du binôme nous donne, pour $m \geqslant 1$,

$$f^m = (\text{id} + j)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} j^k = \text{id} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^{k-1} j = \text{id} + \frac{1}{3} \left(-1 + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 3^k \right) j = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1) j$$

Cette relation est encore vérifiée en 0, ainsi $\boxed{\text{Pour tout } m \in \mathbb{N},\ f^m = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1) j}$

c) $\chi_f(x) = \det(x\,\mathrm{id} - f) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-4 & -1 & -1 \\ x-4 & x-2 & -1 \\ x-4 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x-4)$

Par conséquent $\boxed{f \text{ admet deux valeurs propres distinctes, } \lambda = 1 \text{ et } \mu = 4}$

d) **i)** D'après la question 2b, $f^m = \left(\mathrm{id} - \frac{1}{3}j\right) + 4^m \left(\frac{1}{3}j\right)$, donc $\boxed{p = \mathrm{id} - \frac{1}{3}j \text{ et } q = \frac{1}{3}j}$ conviennent.

ii) Soit (p_1, q_1) et (p_2, q_2) deux couples d'endomorphismes vérifiant $\forall m \in \mathbb{N} \quad f^m = p_i + 4^m q_i$.
Ainsi, $\forall m \in \mathbb{N} \quad (p_1 - p_2) + 4^m(q_1 - q_2) = 0$, et en particulier pour $m = 0$ et $m = 1$:

$$\begin{cases} (p_1 - p_2) & + & (q_1 - q_2) & = & 0 \\ (p_1 - p_2) & + & 4(q_1 - q_2) & = & 0 \end{cases}$$

Et en résolvant ce système, on trouve $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$. Donc $\boxed{\text{Ce couple est unique}}$

iii) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha p + \beta q = 0$. D'après d)i., il vient

$$0 = \alpha p + \beta q = \alpha \left(\mathrm{id} - \frac{1}{3}j\right) + \beta \left(\frac{1}{3}j\right) = \alpha\,\mathrm{id} + (\beta - \alpha)\frac{1}{3}j$$

Or, vu leurs matrices, id et j ne sont pas colinéaires, donc $\alpha = 0$ et $\beta = \alpha = 0$.
Conclusion : $\boxed{(p, q) \text{ forme une famille libre}}$

e) **i)** $p^2 = \mathrm{id} - \frac{2}{3}j + \frac{1}{9}(3j) = \mathrm{id} - \frac{1}{3}j = p$ et $q^2 = \frac{1}{9}(3j) = q$. Donc $\boxed{p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs}}$
$p \circ q = (\mathrm{id} - \frac{1}{3}j) \circ (\frac{1}{3}j) = \frac{1}{j} - \frac{1}{9}(3j) = 0$ et $q \circ p = q \circ p = 0$ (car ce sont des polynômes en j).

ii) Soit $h = \alpha p + \beta q$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$h^2 = (\alpha p + \beta q)^2 = \alpha^2 p^2 + \beta^2 q^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q$$

Donc $h^2 = f$ équivaut à $\alpha^2 p + \beta^2 q = p + 4q$ (par construction de p et q). Or (p, q) est libre, donc $\alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 4$. En conclusion les h qui conviennent sont les suivants

$$\boxed{p + 2q, \qquad -p + 2q, \qquad p - 2q \quad \text{et} \quad -p - 2q}$$

f)
- $\underline{E_1}$: Soit $x \in \mathbb{R}^3$ de matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Le système $(I_3 - A)X = 0$ s'écrit $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ainsi $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$
- $\underline{E_4}$: Méthode 1 : comme dans la question 2.
  Méthode 2 : $\dim E_4 = 1$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 4, donc $\boxed{E_4 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$

En conclusion, $\boxed{f \text{ est diagonalisable dans la base de vecteurs propres } ((1,-1,0),(1,0,-1),(1,1,1)).}$

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}\,(p, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}\,(q, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Matrices de p et q : $q = \frac{1}{3}(f - \mathrm{id})$ et $p = -\frac{1}{3}(f - \mathrm{id}) + \mathrm{id}$.

g) $\boxed{K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)}$ *(il faut raisonner par blocs)*

h) Soit h l'endomorphisme de matrice Y dans la base $\mathscr{B}'$ des vecteurs propres. Par construction, $Y^2 = D$, ce qui se traduit par $h^2 = f$ en termes d'endomorphismes. Or $h = \alpha p + \beta q$ signifie $\beta = 2$ et K diagonale, ce qui n'est pas le cas.

Donc $\boxed{h \text{ vérifie } h^2 = f \text{ mais n'est pas combinaison linéaire de } p \text{ et } q}$

Exercice 2 (ESSEC 2010, B/L)

Partie 1

Construisons l'inverse : pour tout $y \in \mathbb{R} - \{1\}$, on pose $g(y) = \dfrac{1}{y-1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(f(x)) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x} - 1} = x$, et pour tout $y \in \mathbb{R} - \{1\}$, $f(g(y)) = 1 + \dfrac{1}{\frac{1}{y-1}} = y$.

Conclusion : $\boxed{f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} - \{1\} \text{ est bijective d'inverse } f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y-1}}$

*Il faut vérifier $f \circ g$ **et** $g \circ f$. Ne pas appeler « f^{-1} » la fonction g avant de l'avoir montré.*

Partie 2

1) a) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u(P) &= X^2 \left(a\Big(1 + \frac{1}{X}\Big)^2 + b\Big(1 + \frac{1}{X}\Big) + c \right) \\ &= X^2 \left(a\Big(1 + \frac{2}{X} + \frac{1}{X^2}\Big) + b + \frac{b}{X} + c \right) \\ &= aX^2 + 2aX + a + bX^2 + bX + cX^2 \\ &= \boxed{(a+b+c)X^2 + (2a+b)X + a} \end{aligned}$$

Finalement, avec les notations de l'énoncé, $\boxed{\alpha = a+b+c,\ \beta = 2a+b \text{ et } \gamma = a}$

b) Vu qu'après simplification la fraction rationnelle $u(P)$ est un polynôme, il suffit d'évaluer en 0 :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} u(P)(x) = a = P(0)}$$

2) En prenant un équivalent en 0, il vient $\Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big)^k \sim \dfrac{1}{x^k}$, puis pour la fraction rationnelle $u(P)(x)$, en notant $d = \deg P$,

$$u(P)(x) = x^n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^k \right) \sim x^n \left(a_d \frac{1}{x^d} \right) = a_d x^{n-d}$$

Donc la limite $\lim\limits_{x \to 0} u(P)(x)$ existe et $\boxed{\ell = a_n}$

3) *Dans « endomorphisme » il y a deux choses à montrer : « endo », on arrive dans le même espace que l'espace de départ ; et « morphisme », c'est une application linéaire.*

Par linéarité de l'évaluation, il vient $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$u(\lambda P + Q) = X^n (\lambda P + Q)\Big(1 + \frac{1}{X}\Big) = X^n \left(\lambda P\Big(1 + \frac{1}{X}\Big) + Q\Big(1 + \frac{1}{X}\Big) \right) = \lambda u(P) + u(Q)$$

Donc u est linéaire.

De plus, en développant par la formule du binôme, $P\Big(1 + \dfrac{1}{X}\Big)$ est un polynôme en $\dfrac{1}{X}$, de degré au plus n :

$$P\Big(1 + \frac{1}{X}\Big) = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{1}{X^k}$$

Par conséquent, $u(P) = X^n P\Big(1+\dfrac{1}{X}\Big) = X^n \sum_{k=0}^{n} b_k X^{-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k X^{n-k} \in \mathbb{R}_n[X]$

Finalement, $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x]}$

Partie 3

On notera M_n la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.

1)
$$\begin{array}{lcll}
u(1) &=& X^3 \times 1 = X^3 & = \ 0\times 1 + 0\times X + 0\times X^2 + 1\times X^3 \\
u(X) &=& X^3 \times \Big(1+\dfrac{1}{X}\Big) = X^3 + X^2 & = \ 0\times 1 + 0\times X + 1\times X^2 + 1\times X^3 \\
u(X^2) &=& X^3 \times \Big(1+\dfrac{1}{X}\Big)^2 = X^3\Big(1+\dfrac{2}{X}+\dfrac{1}{X^2}\Big) & = \ 0\times 1 + 1\times X + 2\times X^2 + 1\times X^3 \\
u(X^3) &=& X^3 \times \Big(1+\dfrac{1}{X}\Big)^3 = X^3\Big(1+\dfrac{3}{X}+\dfrac{3}{X^2}+\dfrac{1}{X^3}\Big) & = \ 1\times 1 + 3\times X + 3\times X^2 + 1\times X^3
\end{array}$$

Finalement, $\boxed{M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

En permutant les colonnes C_1 et C_4, puis C_2 et C_3, on change le signe du déterminant :

$$\det M_3 = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

car le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux. Ainsi, $\boxed{M_3 \text{ est inversible}}$

2) *On peut aussi développer avec la formule du binôme $P\Big(1+\dfrac{1}{X}\Big)$ et résoudre le système (de taille $n+1$) obtenu. Comme il est triangulaire, c'est faisable.*

Soit $P \in \operatorname{Ker} u$. Montrons que $P = 0$.

Comme $u(P) = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $u(P)(x) = x^n P\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big) = 0$, c'est-à-dire $P\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big) = 0$.

Or lorsque x parcourt $\mathbb{R}^*$, $1+\dfrac{1}{x}$ prend une infinité de valeurs (très précisément $\mathbb{R} - \{1\}$, *cf.* partie 1).

Donc le polynôme P a une infinité de racines : $P = 0$.

Ainsi, $\boxed{\operatorname{Ker} u = \{0\}}$

Donc u est un endomorphisme injectif. Or $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie ($\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$), donc

$$\boxed{u \text{ est bijectif}}$$

3) En rentrant X^n dans la somme, puis X^k dans la parenthèse, on trouve

$$u(P) = X^n \sum_{k=0}^{n} a_k \Big(1+\frac{1}{X}\Big)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} X^k \Big(1+\frac{1}{X}\Big)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}(X+1)^k = \boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k Q_k}$$

Montrons que $(Q_0, \ldots, Q_n)$ est libre. Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k Q_k = 0$.

D'après ci-dessus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k Q_k = u(P)$, si on note $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Donc $P \in \operatorname{Ker} u$.

Or d'après 2), $\operatorname{Ker} u = \{0\}$. D'où $P = 0$, c'est-à-dire $a_0 = \cdots = a_n = 0$.

Finalement, $\boxed{\text{La famille } (Q_0, \ldots, Q_n) \text{ est libre}}$

4) La famille $(Q_0, \ldots, Q_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est libre d'après la question 3),
de plus $\operatorname{Card}((Q_0, \ldots, Q_n)) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, donc

$$\boxed{(Q_0,\dots,Q_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$$

5) Soit $j\in\{1,\dots,n+1\}$. À l'aide de la formule du binôme,

$$u(X^{j-1}) = X^n\Big(1+\frac{1}{X}\Big)^{j-1} = X^n\sum_{k=0}^{j-1}\binom{j-1}{k}1^k\times\Big(\frac{1}{X}\Big)^{j-1-k} = \boxed{\sum_{k=0}^{j-1}\binom{j-1}{k}X^{n-j+1+k}}$$

6) D'après 5), en posant $i-1=n-j+1+k$ et donc $k=i+j-2-n$,

$$u(X^{j-1}) = \sum_{k=0}^{j-1}\binom{j-1}{k}X^{n-j+1+k} = \sum_{i=n-j+1}^{n+1}\binom{j-1}{i+j-2-n}X^{i-1}$$

Donc le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j de M_n, qui correspond au coefficient devant X^{i-1} dans le polynôme $u(X^{j-1})$, est

$$\boxed{\binom{j-1}{i+j-2-n}}$$

avec la convention $\binom{n}{k}=0$ si $k>n$, donc ici lorsque $i\leqslant n-j$.

7) Soit x un réel différent de 1, et $P\in\mathbb{R}_n[X]$.

$$u(P)(f^{-1}(x)) = u(P)\Big(\frac{1}{x-1}\Big) = \Big(\frac{1}{x-1}\Big)^n P\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x-1}}\right) = \boxed{\frac{1}{(x-1)^n}P(x)}$$

8) En poursuivant le calcul de la question précédente : $P(x)=(x-1)^n u(P)(f^{-1}(x))$ pour tout $x\neq 1$.

Ainsi, notons , pour tout $Q\in\mathbb{R}_n[X]$, $\boxed{v(Q)=(X-1)^nQ\Big(\frac{1}{X-1}\Big)}$

Par un raisonnement sur le degrée de Q, de même qu'à la question 3 de la partie 2, il vient $v(Q)\in\mathbb{R}_n[X]$.

De plus, $\forall x\neq 1$, $v(u(P))(x)=P(x)$, puis par continuité $v(u(P))=P$. Ainsi $v\circ u=\mathrm{id}$.

Or u est bijectif, donc $\boxed{u^{-1}=v}$

9) On développe : $v(X^j)=(X-1)^n\dfrac{1}{(X-1)^j}=(X-1)^{n-j}=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^{n-j-i}\binom{n-j}{i}X^i$.

Ainsi le coefficient a_{ij} de la matrice de $v=u^{-1}$ dans la base $\mathscr{B}$ est $\boxed{(-1)^{n-j-i+2}\binom{n-j+1}{i}-1}$

(On décale i et j de 1 puisqu'on commence à 1 au lieu de 0).

Exercice 3 (E3A PC, B 2010)

1) a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la formule de Moivre s'écrit

$$\cos(3x)+i\sin(3x) = (\cos(x)+i\sin(x))^3 = \cos^3(x)+3i\sin(x)\cos^2(x)-3\sin^2(x)\cos(x)-i\sin^3(x)$$

Donc l'égalité des parties imaginaire s'écrit

$$\boxed{\sin(3x)=3\sin(x)(1-\sin^2(x))-\sin^3(x)=-4\sin^3(x)+3\sin(x)}$$

b) i) Au voisinage de 0, $\sin(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,

$$f(x)=\frac{\sin(x)}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{6}+o(x)-\frac{1}{x}=-\frac{x}{6}+o(x)$$

Donc $\lim\limits_0 f=0$, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$

ii) La fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ car composée de fonction de classe C^1.
En $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = -\dfrac{1}{6}$ d'après le développement limité effectué au 1b.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - 2\sin(x) + x}{x^3} = \frac{x - x^3/2 - 2x + x^3/3 + x + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1)$$

et $\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ *(on peut aussi appliquer le théorème de prolongation $\mathscr{C}^1$: f et f' ont une limite en 0)*

2) **a)** La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^3(x)}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- Au voisinage de 0, $\dfrac{\sin^3(x)}{x^2} \sim x$, la fonction est prolongeable par continuité donc intégrable.
- Au voisinage de $+\infty$, $\left|\dfrac{\sin^3(x)}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ qui est intégrable (Riemann), donc la fonction est intégrable.

Conclusion : $\boxed{I \text{ existe}}$

b) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

i)
- Les deux fonctions sont continues sur $[a, +\infty[$ et $[3a, +\infty[$.
Au voisinage de $+\infty$, $\left|\dfrac{\sin(3x)}{x^2}\right|$ et $\left|\dfrac{\sin(x)}{x^2}\right|$ sont majorée par $\dfrac{1}{x^2}$, qui est intégrable. Donc $\boxed{\text{ces deux intégrales converges}}$.
- Le changement de variable $u = 3x$ dans la première intégrale nous donne

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2/9}\,\frac{\mathrm{d}u}{3} = 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x}$$

ii) L'intégrale $I(a)$ converge (voir 2)a)). D'après 1a, $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, d'après ci-dessus,

$$4I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{x^2}\mathrm{d}x = 3\int_a^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x - 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x = 3\int_a^{3a} \varphi(x) + \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

Or $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(3)$ donc

$$\boxed{I(a) = \frac{3}{4}\int_a^{3a} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\ln(3)}{4}}$$

iii) Notons Φ une primitive de φ sur $\mathbb{R}$. Puisque φ est continue sur $\mathbb{R}$, Φ est définie et continue en $x = 0$.

$$I = \lim_{a\to 0} I(a) = \lim_{a\to 0}\left(\frac{3}{4}(\Phi(3a) - \Phi(a)) + \frac{\ln(3)}{4}\right) = \frac{\ln(3)}{4}$$

Exercice 4 (Edhec ECE 2016)

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Étude de f_n.

a) La fonction $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[n, +\infty[$. Sa *primitive* f_n est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n, +\infty[$, et

$$\forall x \in [n, +\infty[\qquad f_n'(x) = e^{\sqrt{x}} > 0$$

En conclusion, $\boxed{f_n \text{ est strictement croissante sur } [n, +\infty[}$

b) La fonction $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ est croissante sur $[n, +\infty[$ comme composée de $t \mapsto \sqrt{t}$ et exp, croissantes. *(On peut aussi dériver cette fonction, en prenant garde à imposer $t > 0$ pour que $t \mapsto \sqrt{t}$ soit dérivable.)*

Donc $\forall x \in [n, +\infty[$, $\forall t \in [n, x] \quad e^{\sqrt{n}} \leqslant e^{\sqrt{t}}$, puis en intégrant entre n et x, par croissance de l'intégrale,

$$\forall x \in [n, +\infty[\qquad (x-n)e^{\sqrt{n}} \leqslant \int_n^x e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = f_n(x)$$

Donc, comme $e^{\sqrt{n}} > 0$, par minoration,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty}$$

c) La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $[n, +\infty[$, et 1 est compris entre $f_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Donc, d'après le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{Il existe un unique } u_n \in [n, +\infty[\text{ tel que } f_n(u_n) = 1}$$

2) **a)** Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [n, +\infty[$, donc $n \leqslant u_n$ et par minoration

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Par croissance de $t \mapsto e^{\sqrt{t}}$ sur l'intervalle $[n, u_n]$, on obtient l'encadrement $e^{\sqrt{n}} \leqslant e^{\sqrt{t}} \leqslant e^{\sqrt{u_n}}$, puis en intégrant,

$$(n - u_n)e^{\sqrt{n}} \leqslant f_n(u_n) = 1 \leqslant (n - u_n)e^{\sqrt{u_n}}$$

En divisant la partie gauche de l'encadrement par $e^{\sqrt{u_n}} > 0$ et la partie droite par $e^{\sqrt{n}} > 0$, il vient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - n$.

a) La question 2)b) donne l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant v_n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$$

Or d'après 2)a) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc par encadrement

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = 0}$$

b) Montrons que, pour tout $x \in [-1, +\infty[$, $1 + x \leqslant \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2$.

$$1 + x - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x - \left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right) = -\frac{x^2}{4} \leqslant 0$$

Donc $1 + x \leqslant \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2$. Or $0 \leqslant 1 + x$, donc, par croissance de la racine carrée,

$$\sqrt{1+x} \leqslant \left|1 + \frac{x}{2}\right| = 1 + \frac{x}{2}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Méthode : Au brouillon, on part de la formule demandée pour essayer d'atteindre une expression de la forme $\sqrt{1+x} \leqslant \ldots$ et on regarde si en appliquant l'inégalité précédente, on obtient le résultat. Puis au propre on écrit la preuve dans l'autre sens.*

Avec $x = \dfrac{u_n}{n} - 1 \geqslant -1$, l'inégalité précédente s'écrit

$$\begin{aligned}
& \sqrt{1 + \frac{u_n}{n} - 1} \leqslant 1 + \frac{\frac{u_n}{n} - 1}{2} = 1 + \frac{u_n - n}{2n} = 1 + \frac{v_n}{2n} \\
\Longrightarrow \quad & \sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \\
\Longrightarrow \quad & \exp\left(-\sqrt{u_n}\right) \geqslant \exp\left(-\sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) = e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)}$

d) D'après 2)b) et 3)c), nous avons l'encadrement suivant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leqslant e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant v_n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{v_n}{e^{-\sqrt{n}}} \leqslant 1$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ (d'après 3)a)) donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{e^{-\sqrt{n}}} = 1$, ainsi

$$\boxed{v_n \sim e^{-\sqrt{n}}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE