Épreuve de Mathématiques 4

Correction

Exercice 1 (PT A 2013)

Partie 1 (Préliminaires)

1) La condition est $q = r$, car la définition du produit est $c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$.

La matrice AB sera de taille $p \times s$, p lignes et s colonnes.

2) a) Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ fixés. Par définition de la convergence des suites $(A_p)_p$ et $(B_p)_p$ vers, respectivement, A et B, on a

$$\lim_{p \to +\infty} a_{ij}^{(p)} = a_{ij} \qquad \text{et} \qquad \lim_{p \to +\infty} b_{ij}^{(p)} = b_{ij}$$

Donc, comme une somme de suite convergente est convergente, $(a_{ij}^{(p)} + b_{ij}^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ converge, et par linéarité de la limite,

$$\lim_{p \to +\infty} a_{ij}^{(p)} + b_{ij}^{(p)} = a_{ij} + b_{ij}$$

Ainsi, la suite $(A_p + B_p)_p$ converge vers $A + B$.

b) Posons $C_p = A_p B_p$ et $C = AB$, de coefficients

$$c_{ij}^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p)} b_{kj}^{(p)} \qquad \text{et} \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ fixés. Les suites convergentes sont un anneau et la limite est un morphisme d'anneaux. Donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la suite $(a_{ik}^{(p)} b_{kj}^{(p)})_p$ converge vers $a_{ik} b_{kj}$. En sommant sur k, on trouve que $(c_{ij}^{(p)})_p$ converge vers c_{ij}.
Ainsi, la suite $(A_p B_p)_p$ converge vers AB.

Partie 2

1) $X_1 \neq 0$ et $AX_1 = \begin{pmatrix} 1/2 + 1/2 \\ 3/4 + 0 + 1/4 \\ 1/8 + 7/8 + 0 \end{pmatrix} = X_1$.

Conclusion : $\boxed{X_1 \text{ est un vecteur propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 1.}$

2) Calculons le polynôme caractéristique de A , $\chi_A(x) = \det(xI_3 - A)$:

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & x & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{7}{8} & x \end{vmatrix} && \hookleftarrow\ C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} x-1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ x-1 & x & -\frac{1}{4} \\ x-1 & -\frac{7}{8} & x \end{vmatrix} && \hookleftarrow\ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} x-1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}+x & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2}+x \end{vmatrix} && \hookleftarrow \text{Matrice triangulaire blocs} \\
&= (x-1)\begin{vmatrix} \frac{1}{2}+x & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{2}+x \end{vmatrix} \\
&= (x-1)((\frac{1}{2}+x)^2 + \frac{3}{32}) && \hookleftarrow \text{factorisation de } a^2 - b^2 \text{ dans } \mathbb{C} \\
&= (x-1)\left(x + \frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{32}}\right)\left(x + \frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{32}}\right)
\end{aligned}$$

Or $\sqrt{\dfrac{3}{31}} = \dfrac{\sqrt{6}}{8}$

Les valeurs propres de A sont donc : $\boxed{\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{8} \\ \lambda_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{8} = \overline{\lambda_2} \end{cases}}$

Comme seule la première valeur propre est réelle, χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc :

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathbb{R}}$$

Comme les trois valeurs propres complexes sont distinctes deux à deux, donc de multiplicité 1 :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{C}}$$

3) D étant diagonale, D^n s'obtient en élevant les termes diagonaux à la puissance n. Ainsi :

$$\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{8})^n & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{8})^n \end{pmatrix}}$$

De plus $\dfrac{\sqrt{6}}{8} = \sqrt{\dfrac{3}{32}}$, et donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, or $|\lambda_2| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{6}{64}} = \sqrt{\dfrac{11}{32}} < 1$, donc $\lambda_2^n \to 0$ lorsque n tend vers l'infini. De même pour $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$. Et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

4) A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ d'après la question 2), et la matrice diagonale associée est justement D, les valeurs propres ayant été déterminées au 2).
Soit P la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres, rangés dans le bon ordre : un vecteur propre pour 1, puis un pour $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{6}}{8}$ et finalement un pour $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}}{8}$.
Alors, d'après la formule de changement de base, $A^n = PD^nP^{-1}$.
D'après le résultat de la partie 1, 2)b), comme $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n$ existe, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$ existe et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A^n = P \lim_{n\to+\infty} D^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}$$

5) $\pi A = \pi \iff {}^tA\,{}^t\pi = {}^t\pi$
Il s'agit donc de déterminer l'unique vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 1, dont les coordonnées sont positives et dont la somme des coordonnées vaut 1.
Résolvons donc $\mathcal{S}'$: $({}^tA - I_3)X = 0$

$$\begin{aligned}
X \text{ est solution de } \mathcal{S}' &\iff \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{7}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} X = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} -8 & 6 & 1 \\ 4 & -8 & 7 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix} X = 0 && \hookleftarrow \text{On multiplie par 8} \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & -10 & 15 \\ 4 & -8 & 7 \\ 0 & 10 & -15 \end{pmatrix} X = 0 && \hookleftarrow \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \\
&\iff \begin{pmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 0 & 10 & -15 \end{pmatrix} X = 0 && \hookleftarrow \text{On enlève } L_1 \\
&\iff \begin{pmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} X = 0 && \hookleftarrow L_2 \leftarrow \frac{L_2}{10} \\
&\iff \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} X = 0 && \hookleftarrow L_1 \leftarrow L_1 + 8L_2 \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} X = 0 && \hookleftarrow L_1 \leftarrow \frac{L_2}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de $\mathcal{S}'$. Comme $\frac{5}{4} + \frac{3}{2} + 1 = 15/4$, on aura :

$$\boxed{\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{4}{15} \end{pmatrix}}$$

Partie 3

1) $B - I_2 = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-b & b-1 \end{pmatrix}$

$B - (a+b-1)I_2 = \begin{pmatrix} 1-b & 1-a \\ 1-b & 1-a \end{pmatrix}$

Et donc :

$P(B) = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-b & b-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-b & 1-a \\ 1-b & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-b)(a-1+1-a) & (1-a)(a-1+1-a) \\ (1-b)(1-b+b-1) & (1-a)(1-b+b-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où :

$$\boxed{P(B) = 0}$$

2) **a)** Pour p entier strictement positif, en faisant la **division euclidienne** de X^p par $P(X)$ qui est de degré 2, il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que $X^p = P(X)Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < 2$. $R(X)$ s'écrit donc :$R(X) = \alpha_p X + \beta_p$.

Ainsi :

$$\boxed{\exists!(Q, \alpha_p, \beta_p) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, X^p = P(X)Q(X) + \alpha_p X + \beta_p}$$

b) On évalue en les racines de P pour se débarrasser du produit $P(X)Q(X)$.

En évaluant en 1 on trouve : $1 = \alpha_p + \beta_p$,

et en $a+b-1$ on obtient : $(a+b-1)^p = \alpha_p(a+b-1) + \beta_p$

On résout ce petit système, par substitution par exemple : on injecte $1 - \alpha_p = \beta_p$ dans la seconde relation :

$$\begin{aligned} (a+b-1)^p = \alpha_p(a+b-1) + 1 - \alpha_p &\iff \alpha_p(a+b-2) = (a+b-1)^p - 1 \\ &\iff \alpha_p = \frac{(a+b-1)^p - 1}{a+b-2} \end{aligned}$$

(car $a + b < 2$)

D'où :

$$\boxed{\alpha_p = \frac{(a+b-1)^p - 1}{a+b-2} \text{ et } \beta_p = 1 - \frac{(a+b-1)^p - 1}{a+b-2}}$$

c) Comme $P(B) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} B^p &= \alpha_p B + \beta_p I_2 \\ &= \alpha_p(B - I_2) + I_2 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(a+b-1)^p - 1}{a+b-2}(a-1) + 1 & \frac{(a+b-1)^p - 1}{a+b-2}(1-a) \\ \frac{(a+b-1)^p - 1}{a+b-2}(1-b) & \frac{(a+b-1)^p - 1}{a+b-2}(b-1) + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette dernière expression ne se simplifiant pas facilement, on répond :

$$\boxed{B^p = \alpha_p B + \beta_p I_2}$$

3) $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < b < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < a+b-1 < 1$

et donc $\lim\limits_{p \to +\infty} (a+b-1)^p = 0$

En reprenant la dernière expression de B^p on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to+\infty} B^p &= \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{a+b-2}(a-1)+1 & \dfrac{-1}{a+b-2}(1-a) \\ \dfrac{-1}{a+b-2}(1-b) & \dfrac{-1}{a+b-2}(b-1)+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{1-a+a+b-2}{a+b-2} & \dfrac{a-1}{a+b-2} \\ \dfrac{b-1}{a+b-2} & \dfrac{1-b+a+b-2}{a+b-2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{b-1}{a+b-2} & \dfrac{a-1}{a+b-2} \\ \dfrac{b-1}{a+b-2} & \dfrac{a-1}{a+b-2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} B^p = \frac{1}{a+b-2}\begin{pmatrix} b-1 & a-1 \\ b-1 & a-1 \end{pmatrix}}$$

Partie 4

1) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Comme $m_{ik} \geqslant 0$, le second point nous donne :

$$m_{ij} = 1 - \sum_{k=1;k\neq j}^{n} m_{ik} \leqslant 1$$

Conclusion : $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad m_{ij} \leqslant 1}$

2) Soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = MX_1$. Par définition du produit matriciel (rappelé au 1.1),

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad y_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}x_k = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \qquad (\text{car } x_k = 1 \text{ pour tout } k)$$

Or M est stochastique, donc $y_i = 1$, et $Y = X_1$.
Conclusion : $\boxed{MX_1 = X_1}$

b) Si M est à coefficients positifs, alors le premier point est vérifié. De plus, par définition du produit matriciel $MX_1 = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} m_{1j} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} m_{nj} \end{pmatrix}$, donc $MX_1 = X_1 \Longrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum\limits_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$

Ainsi, $\boxed{M \text{ est stochastique.}}$

c) En 2)a)-b), nous venons de montrer une nouvelle caractérisation des matrices stochastiques. Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices stochastiques. D'après 2)a), elles vérifient $AX_1 = X_1$ et $BX_1 = X_1$. Donc

$$ABX_1 = A(BX_1) = AX_1 = X_1$$

De plus, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} \geqslant 0$ et $b_{ij} \geqslant 0$ entraîne

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \geqslant 0$$

Donc d'après 2)b), $\boxed{\text{La matrice } AB \text{ est stochastique.}}$

3) Soit M une matrice stochastique, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| = 1$.

a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$|y_i| = \left|\sum_{k=1}^{n} m_{ik}x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |m_{ik}x_k| \overset{(\star)}{=} \sum_{k=1}^{n} m_{ik}|x_k| \overset{(\star\star)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \times 1 = 1$$

Car $m_{ik} \geqslant 0$ ($(\star)$) et $|x_k| \leqslant 1$ ($(\star\star)$).
Donc $\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ |y_i| \leqslant 1.}$

b) On a supposé que $y_i = \lambda x_i$. Donc 3)a) nous donne :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad |\lambda||x_i| \leqslant 1$$

Or $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| = 1.$: il existe un i_0 tel que $|x_{i_0}| = 1$. Pour $i = i_0$, l'inégalité précédente s'écrira

$$\boxed{|\lambda| \leqslant 1}$$

c) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul vérifiant $MX = \lambda X$.

Soit $M = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$. Comme $X \neq 0$, $M \neq 0$. On peut donc poser $\widetilde{X} = \dfrac{1}{M}X = \begin{pmatrix} x_1/M \\ \vdots \\ x_n/M \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\widetilde{X}$ vérifiera $M\widetilde{X} = \lambda\widetilde{X}$ (on a multiplié les deux côtés par $\dfrac{1}{M}$) et

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |\widetilde{x}_i| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\frac{x_i}{M}\right| = \frac{1}{M} \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| = 1$$

Donc d'après 3)b), $|\lambda| \leqslant 1$.

Exercice 2 (PT 2015 B)

1) a)

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E) &\implies f(x) = \lambda x \\ &\implies f^2(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x \\ &\implies x \in \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda^2 \operatorname{id}_E) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda^2 \operatorname{id}_E)}$
Si $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E) \neq \{0\}$, alors $\operatorname{Ker}(f^2 - \lambda^2 \operatorname{id}_E) \neq \{0\}$.
Par conséquent, λ valeur propre de f implique λ^2 valeur propre de f^2.
C'est une des questions de cours, avec $P = X^2$.

b) La question précédente avec $\lambda = 0$ s'écrit $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$. Donc $\dim \text{Ker } f \leqslant \dim \text{Ker } f^2$.
Supposons qu'il y a égalité : $\dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker } f^2$.
Il y a alors inclusion et égalité des dimensions : $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
Montrons que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$:

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f &\implies f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \exists y \in E \; x = f(y) \\ &\implies \exists y \in E \; x = f(y) \quad \text{et} \quad f^2(y) = 0 \\ &\implies \exists y \in E \; x = f(y) \quad \text{et} \quad y \in \text{Ker } f^2 = \text{Ker } f \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$:
Par contraposition, si $\text{Ker } f \cap \text{Im } f \neq \{0\}$, alors $\dim \text{Ker } f < \dim \text{Ker } f^2$. Comme ce sont des entiers :

$$\boxed{\dim(\text{Ker } f^2) \geqslant \dim(\text{Ker } f) + 1}$$

c) Par définition $P_f(x) = \det(x \,\text{id}_E - f)$ et $P_{f^2}(x) = \det(x \,\text{id}_E - f^2)$.
D'où, en rentrant le $(-1)^{\dim E}$ par d-linéarité de det, et comme $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$,

$$\begin{aligned} (-1)^d P_f(X) P_f(-X) &= (-1)^d \det(X \,\text{id}_E - f) \det(-X \,\text{id}_E - f) \\ &= \det(X \,\text{id}_E - f) \det(X \,\text{id}_E + f) \\ &= \det\Big((X \,\text{id}_E - f) \circ (X \,\text{id}_E + f)\Big) \\ &= \det(X^2 \,\text{id}_E - f^2) = P_{f^2}(X^2) \end{aligned}$$

2) a)
- Pour tout $P \in E$, $\deg(f(P)) \leqslant 3$ donc, comme $n \geqslant 3$, $f(P) \in E$.
  Donc f est à valeurs dans E.
- $\forall (P, Q) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (X^2 - X + 1)(\lambda P + Q)(-1) + (X^3 - X)(\lambda P + Q)(0) + (X^3 + X^2 + 1)(\lambda P + Q)(1) \\ &= \lambda\Big((X^2 - X + 1)P(-1) + (X^3 - X)P(0) + (X^3 + X^2 + 1)P(1)\Big) \\ &\quad + \Big((X^2 - X + 1)Q(-1) + (X^3 - X)Q(0) + (X^3 + X^2 + 1)Q(1)\Big) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$

b)
- Noyau : Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker } f &\iff f(P) = (X^2 - X + 1)P(-1) + (X^3 - X)P(0) + (X^3 + X^2 + 1)P(1) = 0 \\ &\iff (P(0) + P(1))X^3 + (P(-1) + P(1))X^2 - (P(-1) + P(0))X + P(-1) + P(1) = 0 \\ &\iff \begin{cases} P(0) + P(1) = 0 \\ P(-1) + P(1) = 0 \\ P(-1) + P(0) = 0 \\ P(-1) + P(1) = 0 \end{cases} \\ &\iff P(0) = P(1) = P(-1) = 0 \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X] \; P = X(X - 1)(X + 1)Q \end{aligned}$$

Comme $n \geqslant 3$, il n'y a pas de contradiction.
Conclusion : $\boxed{\text{Ker } f = X(X - 1)(X + 1)\mathbb{R}_{n-3}[X] \text{ et } \dim \text{Ker } f = n - 2}$

- Image : Le théorème du rang nous dit *(ça doit être pavlovien)*

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = n + 1 - (n-2) = 3$$

De plus, pour tout $P \in E$,

$$\begin{array}{rcccccccc} f(P) & = & (P(0)+P(1))X^3 & + & (P(-1)+P(1))X^2 & - & (P(-1)+P(0))X & + & P(-1)+P(1) \\ & = & aX^3 & + & bX^2 & + & cX & + & b \\ & = & aX^3 & + & b(X^2+1) & + & cX & & \\ & \in & \multicolumn{7}{l}{\operatorname{Vect}(X^3, X^2+1, X)} \end{array}$$

Donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(X^3, X^2+1, X)$.
Or (X^3, X^2+1, X) une famille échelonnée en degré donc libre.
Ainsi, $\dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Vect}(X^3, X^2+1, X) = 3$,
puis $\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(X^3, X^2+1, X) \quad \text{et} \quad \dim \operatorname{Im} f = 3}$

c) Comme $n \geqslant 3$, $\dim \operatorname{Ker} f = n - 2 \geqslant 1$, donc f n'est pas injectif.
Comme f est un endomorphisme en dimension finie, il n'est pas non plus surjectif.

d) Comme f n'est pas injectif, $E_0 = \operatorname{Ker} f \neq \{0\}$. Ainsi, $\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f}$
Notons α sa multiplicité. Comme $\dim E_0 \leqslant \alpha$ et que $\dim E_0 = \dim \operatorname{Ker} f = n-2$, il vient

$$\boxed{\alpha \geqslant n-2}$$

e) (après calcul, mettre au moins un étape intermédiaire sur la copie)

$$f(Q_1) = 4Q_1 \qquad \text{et} \qquad f(Q_2) = 2Q_2$$

En conclusion $\boxed{Q_1 \text{ est un vecteur propre de } f \text{ pour la valeur propre 4, et } Q_2 \text{ pour la valeur propre 2}}$

f) D'après les résultats de la question (b), le polynôme $X^3 - X$ appartient à $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$, ce qui montre que
$\boxed{\text{La relation } \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E \text{ n'est pas satisfaite}}$

g) D'après la question $1(a)$, tout carré d'une valeur propre de f est valeur propre de f^2.
Puisque 0, 2 et 4 sont valeurs propres de f, 0, 4 et 16 sont des valeurs propres de f^2.
De plus, d'après la question $2(f)$, $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) \neq \{0\}$, et donc, d'après la question $1(b)$,

$$\dim \operatorname{Ker}(f^2) \geqslant \dim \operatorname{Ker}(f) + 1 = n - 1$$

Les sous-espaces propres de f^2 associés à 4 et 16 étant de dimension au moins 1, la somme des dimensions des sous-espaces propres de f^2 est supérieure ou égale à $n-1+1+1 = n+1 = \dim(E)$. On en déduit que f^2 est diagonalisable, et n'admet aucune autre valeur propre que 0, 4 et 16. De plus :

$$\dim \operatorname{Ker}(f^2) = n-1, \quad \dim \operatorname{Ker}(f^2 - 4\,\mathrm{id}_E) = 1, \quad \dim \operatorname{Ker}(f^2 - 16\,\mathrm{id}_E) = 1.$$

h) Puisque f^2 est diagonalisable, le polynôme caractéristique $P_{f^2}(X)$ est scindé, et, au vu des dimensions des sous-espaces propres :

$$P_{f^2}(X) = X^{n-1}(X-4)(X-16).$$

Ainsi, $P_{f^2}(X^2) = X^{2n-2}(X^2-4)(X^2-16)$, et donc, en utilisant $1(c)$:

$$P_f(X)P_f(-X) = (-1)^n X^{2n-2}(-2)(X+2)(X-4)(X+4).$$

Le polynôme caractéristique $P_f(X)$ divise donc $(-1)^n X^{2n-2}(-2)(X+2)(X-4)(X+4)$, qui est un polynôme scindé. Ainsi, $P_f(X)$ est scindé, donc $\boxed{f \text{ est trigonalisable}}$

Montrons que f n'est pas diagonalisable en procédant par l'absurde : si $f$est diagonalisable, alors il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour f. Puisque $\operatorname{Ker}(f)$ est de dimension $n-2$, on peut choisir une telle base $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ telle que $f(P_i)=0$ pour $i\leqslant n-3$ et $f(P_i)=\lambda_i P_i$ pour $i\geqslant n-2$ avec λ_i valeur propre non nulle de f. Mais alors, $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est encore une base de vecteurs propres pour f^2 : les valeurs propres associées sont 0 pour $i\leqslant n-3$ et $\lambda_i^2\neq 0$ pour $i\geqslant n-2$, donc $\dim\operatorname{Ker}(f^2)=n-2$, ce qui est en contradiction avec le résultat de la question (g). On a ainsi établi que f n'est pas diagonalisable.
On sait déjà que 0, 2 et 4 sont valeurs propres de f, la dimension du sous-espace propre associé à 0 est $n-2$. Si f admettait une autre valeur propre, la somme des dimensions des sous-espaces propres serait supérieure ou égale à $n+1$, ce dont on pourrait déduire que f est diagonalisable. Ainsi, les seules valeurs propres de f sont 0, 2 et 4, et les dimensions des sous-espaces propres sont pour la même raison (non diagonalisabilité de f) $n-2$, 1 et 1. Le sous-espace propre associé à 0 est l'ensemble des multiples de $X(X-1)(X+1)$, le sous-espace propre associé à 2 est la droite vectorielle engendrée par Q_2, et celui associé à 4 est la droite vectorielle engendrée par Q_1.

Rapport du jury sur l'épreuve de Mathématiques B, PT 2015

Cette partie est conçue pour être traitée sans avoir recours aux matrices, mais il est possible de les utiliser pour certaines questions à condition de préciser la base utilisée (on rappelle que tous les espaces vectoriels ne disposent pas d'une base canonique) et de rester en dimension quelconque.
Le théorème du rang a été très souvent malmené dans cette partie (questions 1b, 2b, c, e).

Question 1 (a) : L'inclusion des noyaux (et non pas des ≪ *ker* ≫) est souvent bien démontrée. Par contre la conséquence sur les valeurs propres est souvent fausse. Les (futurs) candidats peuvent vérifier, en utilisant par exemple, la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ que l'affirmation ≪ les valeurs propres de f^2 sont les carrés de celles de f ≫ est fausse. Il est étonnant de voir de nombreuses fois que ≪ f et f^2 ont les mêmes valeurs propres ≫.
Comme l'an dernier, on rappelle que $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$ mais que la réciproque est fausse en général.

Question 1 (b) : Cette question a été peu réussie ... un mélange aventureux du théorème du rang et de la formule de Grassmann a souvent transformé, on ne sait comment, des inégalités larges en strictes.

Question 1 (c) : Cette question n'a été que très peu abordée et encore moins réussie. Elle ne nécessite pourtant que la définition du polynôme caractéristique (avec un déterminant) et la propriété $\det(f)\ \det(g) = \det(f \circ g)$ (et non $\det(f\,g)$).
On rappelle que dans $\mathbb{R}$, tous les polynômes ne sont pas scindés. De plus, la question (a) ne donne aucune information quant à la multiplicité des valeurs propres de f^2.

Question 2 (a) : Nombre de candidats n'en démontre que la moitié ... pas toujours la même .. sans même souvent mentionner l'autre moitié.
Pour la linéarité : on conseille aux candidats de la démontrer soigneusement, 3 égalités sont en général suffisantes, à condition de ne pas oublier de préciser dans quel(s) ensemble(s) se trouvent les objets manipulés. Cela est bien plus rentable que des formulations toutes faites qui sont au mieux douteuses (≪ par linéarité de la somme et du produit ≫ : $P \mapsto P+1$ et $P \mapsto P \times P$ ne sont pas linéaires), au pire complètement fausses (≪ par linéarité des polynômes ≫). Il est inutile de démontrer que $f(0) = 0$.
Pour $f(E) \subset E$: C'est ici que $n \geqslant 3$ est utilisé. On a uniquement $\deg(f(P)) \leqslant 3$ ... On rappelle que $\deg(0) = -\infty$, $P \in \mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow \deg(P) \leqslant n$, et que le produit de deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas toujours un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question 2 (b) : ≪ La ≫ méthode d'obtention du noyau est bien connue. Beaucoup arrivent à $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$ et sans doute emportés par leurs habitudes sur les produits scalaires, en déduisent que $P = 0$. On trouve trop souvent ≪ $\ker(f) = 0$ donc $\dim(\ker(f)) = 1$ ≫.

L'image se limite souvent à $\{P \in E\,;\, \exists\, Q \in E, f(Q) = P\}$. La caractérisation à l'aide des images d'une base est peu utilisée ; elle mène pourtant facilement au résultat.
Attention : l'image et le noyau de f ne contiennent que des polynômes, pas de vecteurs colonnes. On rappelle que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ et on signale que le théorème du rang aurait dû permettre de déceler quelques erreurs.

Question 2 (c) (d) : il s'agit de questions de cours. L'injectivité est mieux maîtrisée que la surjectivité. Il ne suffit pas de dire que f est un endomorphisme pour affirmer ≪ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective ≫. On trouve beaucoup trop souvent : ≪ $f(0) = 0$ donc 0 est valeur propre de f ≫ et ≪ la multiplicité de la valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre ≫.

Question 2 (e) : Question réussie par presque tous les candidats l'ayant abordée.

Question 2 (f) (g) (h) : ces questions font la synthèse de toutes les questions précédentes. On trouve quelques très bonnes réponses, ce qui prouve qu'il y a, heureusement, des candidats pour lesquels l'algèbre linéaire ne se limite pas à diagonaliser des matrices 3×3.