Épreuve de Mathématiques 4

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Partie 1 (Préliminaires)

1) Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ de terme général a_{ij} et $B \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ de terme général b_{ij}.

- **a)** A quelle condition sur p, q, r et s le produit AB est-il défini ? Quelle est alors la taille de la matrice AB ?
- **b)** Sous cette condition, on note c_{ij} le terme général de la matrice AB. Exprimer c_{ij} en fonction des a_{ij} et b_{ij}.

2) Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{ij}^{(p)}$ le terme général de la matrice A_p.
On dit que la suite de matrices converge vers une matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ si pour tout couple (i,j) la suite complexe $(a_{ij}^{(p)})_p$ converge vers a_{ij}.

- **a)** Montrer que, si la suite $(A_p)_p$ converge vers A et si la suite $(B_p)_p$ converge vers B, alors la suite $(A_p + B_p)_p$ converge vers $A + B$.
- **b)** Montrer que, sous les mêmes conditions, la suite $(A_pB_p)_p$ converge vers AB.

Partie 2

On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix}$$

1) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

2) Déterminer les valeurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$?

3) On note

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{8}i & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{8}i \end{pmatrix}$$

Calculer D^n puis $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n$.

4) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$. On ne demande pas ici une expression explicite de la limite (ne pas déterminer P et P^{-1}, contrairement au sujet d'origine).

5) Déterminer l'unique vecteur ligne $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ tel que

- $a > 0$, $b > 0$, et $c > 0$;
- $a + b + c = 1$;
- $\pi A = \pi$.

Partie 3

On considère la matrice carrée B d'ordre 2 suivante

$$B = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$

avec $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. On note I_2 la matrice identité d'ordre 2.

1) On considère le polynôme $P = (X-1)(X-(a+b-1))$. Calculer $P(B) = (B - I_2)(B - (a+b-1)I_2)$.

2) Soit p un entier strictement positif.

a) Justifier l'existence d'un polynôme Q et de deux réels α_p et β_p tels que

$$X^p = P(X)Q(X) + R(X) \qquad \text{avec} \qquad R(X) = \alpha_p X + \beta_p$$

b) En évaluant l'expression précédente en des valeurs de X bien choisies, déterminer les valeurs de α_p et β_p.

c) En déduire une expression de B^p.

3) Montrer que la suite $(B^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Partie 4

Soit $M = (m_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On dit que la matrice M est *stochastique* si

- pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,
$$m_{ij} \geqslant 0$$
- la somme des termes de chaque ligne est égale à 1, c'est-à-dire,
$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$$

1) Soit $M = (m_{ij})$ une matrice stochastique. Montrer que,

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad m_{ij} \leqslant 1$$

2) Soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que si M est stochastique, alors $MX_1 = X_1$.

b) Réciproquement, soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients positifs. Montrer que si $MX_1 = X_1$, alors M est stochastique.

c) En déduire que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

3) Soit M une matrice stochastique, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| = 1$.

a) On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = MX$.

Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|y_i| \leqslant 1$.

b) En déduire que, si $MX = \lambda X$, alors $|\lambda| \leqslant 1$.

c) Montrer que tous les $\lambda \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul vérifiant $MX = \lambda X$ sont de module inférieur à 1.

Exercice 2

1) Question préliminaire.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie d, et f un endomorphisme de E. Ker f désigne le noyau de f, et Im f son image. On note $f^2 = f \circ f$. Enfin, id_E est l'endomorphisme identité de E. λ désigne un réel.

a) Démontrer que

$$\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}\,(f^2 - \lambda^2\,\mathrm{id}_E)$$

Quel lien peut-on en déduire entre les valeurs propres de f et celles de f^2 ?

b) Démontrer que si $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f \neq \{0\}$, alors

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f^2) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}\, f) + 1$$

c) On désigne par P_f et P_{f^2} les polynômes caractéristiques respectifs de f et f^2. Démontrer que

$$P_{f^2}(X^2) = (-1)^d P_f(X) P_f(-X)$$

2) Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3, E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

Soit f l'application définie, pour tout polynôme P de E, par :

$$f(P) = (X^2 - X + 1)P(-1) + (X^3 - X)P(0) + (X^3 + X^2 + 1)P(1)$$

a) Démontrer que f est un endomorphisme de E.

b) Déterminer Ker f et Im f. Préciser leur dimension.

c) f est-il injectif ? Surjectif ?

d) Justifier que 0 est valeur propre de f. Que peut-on dire de sa multiplicité ?

e) Démontrer que les polynômes $Q_1 = 3X^3 + 4X^2 - 3X + 4$ et $Q_2 = X^3 + X$ sont des vecteurs propres de f. Quelles sont les valeurs propres associées ?

f) A-t-on $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = E$?

g) Quelles sont les valeurs propres de f^2 ? En déduire que f^2 est diagonalisable.

h) f est-il trigonalisable ? Diagonalisable ? Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

FIN DE L'ÉPREUVE