

Épreuve de Mathématiques 3

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Calculer le polynôme caractéristique χ_f de f.

2) Déterminer les sous-espaces propres de f. L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

3) Calculer la matrice $(A - I_3)^2$ et donner une équation et la dimension de $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2$.

4) On pose $e_2 = (1, -1, 0)$ et $e_1 = (f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(e_2)$.

- **a)** Trouver un vecteur propre e_3 de f dont la deuxième composante est égale à 1 et justifier que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- **b)** Écrire la matrice B de f dans cette base et exprimer A en fonction de B.
- **c)** Calculer B^n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 muni de sa base canonique $B = \{1, X, X^2\}$.

Pour tout entier k appartenant à $[\![0, 2]\!]$ et tout entier i appartenant à $[\![0, k]\!]$, on note $P_{i,k}$ le polynôme de degré k défini par :

$$\forall j \in [\![0, k]\!] - \{i\},\ P_{i,k}(j) = 0 \quad \text{et} \quad P_{i,k}(i) = 1.$$

$P_{i,k}$ est donc le polynôme de degré k qui vaut 1 en i et qui s'annule pour les autres valeurs entières comprises entre 0 et k.

1) Déterminer $(P_{i,2})_{0 \leqslant i \leqslant 2}$. Montrer que ces polynômes forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$ que nous noterons B'.

2) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Donner les coordonnées de P dans la base B'.

3) Déterminer $M_{B,B'}$, matrice de passage de la base B à la base B' et sans calcul explicite, déterminer l'inverse de $M_{B,B'}$.

4) Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant :

$$P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$$

5) Déterminer $(P_{i,i})_{0 \leqslant i \leqslant 2}$. Montrer que ces polynômes forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$ que nous noterons B''.

6) Déterminer $M_{B,B''}$ matrice de passage de la base B à la base B''.

7) Déterminer, de deux façons différentes, $M_{B',B''}$ matrice de passage de la base B' à la base B''.

Exercice 3

Si U est une partie non vide de $\mathscr{L}(E)$, on appelle centre de U et on note $C(U)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de U, c'est-à-dire

$$C(U) = \{v \in \mathscr{L}(E) \ | \ \forall u \in U,\, u \circ v = v \circ u\}$$

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $U = \{u\}$, $C(\{u\})$ est noté $C(u)$ et appelé aussi le commutant de u. On a donc

$$C(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \ | \ u \circ v = v \circ u\}$$

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit $P = a_0 + a_1 X + \dots a_d X^d = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par

$$P(u) = a_0 \operatorname{id}_E + a_1 u + \dots a_d u^d = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$$

Où $u^k = u \circ u \circ \dots \circ u$ (k fois). Enfin on note $\mathbb{R}[u] = \{P(u) \ | \ P \in \mathbb{R}[X]\}$.
L'objectif du problème est de comparer $C(u)$ et $\mathbb{R}[u]$ dans certains cas.

Partie 1 (Préliminaires)

Dans cette partie, on suppose que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n où $n \in \mathbb{N}^*$; U est une partie non vide de $\mathscr{L}(E)$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que $C(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ de dimension supérieure ou égale à 1.

2) Montrer que $C(u)$ contient $\mathbb{R}[u]$.

3) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ et E_λ le sous-espace propre de E pour la valeur propre λ. Montrer que E_λ est stable par v. (c'est-à-dire que $v(E_\lambda) \subset E_\lambda$).

4) Vérifier que $C(C(u)) \subset C(u)$, puis que $C(C(u))$ contient $\mathbb{R}[u]$.

Partie 2 (Étude d'un exemple)

Dans toute cette partie, on note : $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles,

$$F = \Big\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ | \ \forall n \in \mathbb{N}\ 2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0\Big\}$$

Et $\alpha_n = \dfrac{1}{2^n}$, $\beta_n = (-1)^n$, $\gamma_n = n(-1)^n$.

1) Étude de F :

- **a)** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
- **b)** Déterminer les suites géométriques appartenant à F. Vérifier que $(\gamma_n) \in F$.
- **c)** Montrer que $\dim F = 3$. En déduire que $\mathscr{B} = ((\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n))$ est une base de F.

2) Soit u l'application définie pour $(a_n) \in F$ par $u((a_n)) = (b_n)$ avec $b_n = a_{n+1}$. (l'application u décale les termes de la suite vers la gauche).

- **a)** Montrer que u est un endomorphisme de F.
- **b)** Déterminer u^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- **c)** En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tel que $P(u) = 0$.
- **d)** Montrer, en justifiant soigneusement, que la matrice T de u dans la base $\mathscr{B}$ de la question 1 est $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer T^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3) Centre de u.

- **a)** Soit $v \in C(u)$. Montrer que $\operatorname{Mat}(v, \mathscr{B}, \mathscr{B})$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \delta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

b) Réciproquement, si $v \in \mathscr{L}(F)$ tel que $\mathrm{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \delta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, vérifier que $v \in C(u)$.

c) Que vaut $\dim(C(u))$?

d) Montrer que la famille (id_E, u, u^2) est libre dans $\mathscr{L}(F)$.

e) Comparer $C(u)$ et $\mathbb{R}[u]$.

Partie 3 (second exemple)

Dans cette partie, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$u \neq 0 \qquad \text{et} \qquad u^3 + u = 0$$

1) **a)** Montrer que : $\forall x \in E,\ x + u^2(x) \in \mathrm{Ker}\, u$ et $u^2(x) \in \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)$.
En déduire que $E = \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)$.

b) Monter que $E = \mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)$.

2) **a)** Montrer que $F = \mathrm{Ker}\,(u^2 + \mathrm{id}_E)$ est stable par u.

b) On note v la restriction de u à F. Montrer que $v^2 = -\,\mathrm{id}_F$.

c) En calculant $\det(v^2)$ de deux façons, prouver que $\dim(F) = 2$.

d) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}\,(u)$ et que u n'est pas injectif.

3) Soit e_1 une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$ et e_2 un élément non nul de F. On pose $e_3 = u(e_2)$.

a) Montrer que (e_2, e_3) est une base de F.

b) En déduire que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. Quelle est la matrice A de u dans cette base ?

c) Calculer A^k, pour $k \in \mathbb{N}$.

4) Centre de u.

a) Soit $B = \mathrm{Mat}\,(v, \mathscr{B}, \mathscr{B})$, où $v \in C(u)$. Déterminer la forme de la matrice B.

b) En déduire la dimension de $C(u)$.

c) Montrer que (id_E, u, u^2) forme une base de $C(u)$.

Exercice 4

On note I et A les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathscr{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Partie 1 (Étude de la matrice A)

1) Calculer A^3 en fonction de A.

2) Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.

3) **a)** Déterminer les valeurs propres de A, en déduire (sans calculer les sous-espaces propres) que A est diagonalisable.

b) Diagonaliser A : on explicitera la matrice D diagonale et une matrice P de changement de base dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1, puis on rappellera la formule de changement de base.

Partie 2 (Étude d'une application définie sur $\mathscr{E}$)

1) Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathscr{E}$. En déduire la dimension de $\mathscr{E}$.

2) Soit f l'application définie par

$$\forall M \in \mathscr{E}, \qquad f(M) = AM$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

3) **a)** Montrer que $f^3 = 2f$.

b) En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie $\lambda^3 = 2\lambda$.

4) Déterminer la matrice F de f dans la base (I, A, A^2) de $\mathscr{E}$.

5) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

6) L'endomorphisme f est-il bijectif ? diagonalisable ?

7) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$.

8) Résoudre l'équation $f(M) = I + A^2$ d'inconnue $M \in \mathscr{E}$.

9) Résoudre l'équation $f(N) = A + A^2$ d'inconnue $N \in \mathscr{E}$.

Exercice 5

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution de l'équation différentielle

$$y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

On pourra se placer sur un intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$ fixé.

FIN DE L'ÉPREUVE