Épreuve de Mathématiques 3

Correction

Exercice 1 (PT 2015 A)

Partie 1

1) a) Matriciellement, $f(e_1)$ correspond au vecteur colonne $\begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ de la matrice, donc dans la base canonique

$$\boxed{f(e_1) = (-7, 9, 7, -4)}$$

De même, matriciellement $f^2(e_1) = f(f(e_1))$ s'écrit $A \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -90 \\ -70 \\ 40 \end{pmatrix}$, et il vient

$$\boxed{f^2(e_1) = (-30, -90, -70, 40)}$$

b) Comme $\begin{pmatrix} -30 \\ -90 \\ -70 \\ 40 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$100e_1 + 10f(e_1) + f^2(e_1) = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{La famille } (e_1, f(e_1), f^2(e_1)) \text{ est liée}}$

2) De même $f(e_2)$ a pour vecteur colonne $\begin{pmatrix} -16 \\ -3 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$, et $f^2(e_2)$, $\begin{pmatrix} 160 \\ -70 \\ 40 \\ 70 \end{pmatrix}$, donc

$$100e_2 + 10f(e_2) + f^2(e_2) = 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{La famille } (e_2, f(e_2), f^2(e_2)) \text{ est liée}}$

On peut résoudre le système $\sum_{i=0}^{2} \lambda_i f^i(e_2) = 0$ et on trouve des λ_i qui conviennent, ou en lisant les dernières questions conjecturer que $100, 10$ et 1 vont convenir.

3) Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 f(e_1) + \lambda_3 e_2 + \lambda_4 f(e_2) = 0 \implies \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}-7\\9\\7\\-4\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix}-16\\-3\\-4\\-7\end{pmatrix} = 0$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 - 7\lambda_2 - 16\lambda_4 = 0 \\ 7\lambda_2 - 4\lambda_4 = 0 \\ 9\lambda_2 + \lambda_3 - 3\lambda_4 = 0 \\ -4\lambda_2 - 7\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 - 7\lambda_2 - 16\lambda_4 = 0 \\ 7\lambda_2 - 4\lambda_4 = 0 \\ +\lambda_3 \ (-3 + \frac{9}{7} \times 4)\lambda_4 = 0 \\ \underbrace{(-7 - \frac{4}{7})}_{\neq 0} \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Donc $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est libre.
De plus $\mathrm{Card}\left((e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))\right) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ donc

$$\boxed{(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$$

4) Montrons que la relation $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$ est vérifiée pour les vecteurs de la base précédente :
D'après un calcul effectué au 1),

$$f^2(e_1) + 10f(e_1) + 100e_1 = 0$$

Donc, en appliquant f, linéaire, il vient

$$f(f^2(e_1) + 10f(e_1) + 100e_1) = f^2(f(e_1)) + 10f(f(e_1)) + 100f(e_1) = f(0) = 0$$

Donc la relation est vérifiée par e_1 et $f(e_1)$.
D'après le calcul effectué au 2), il en est de même pour e_2 et $f(e_2)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^4$, comme $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^4$ on peut écrire

$$x = x_1 e_1 + x_2 f(e_1) + x_3 e_2 + x_4 f(e_2)$$

D'où, par linéarité de f et f^2, $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$.
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^4,\ f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0}$

5)

$$\begin{cases} f(e_1) &= 0 \times e_1 + 1 \times f(e_1) + 0 \times e_2 + 0 \times f(e_2) \\ f^2(e_1) &= -100e_1 - 10f(e_1) \\ f(e_2) &= f(e_2) \\ f^2(e_2) &= -100e_2 - 10f(e_2) \end{cases}$$

Donc la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -100 & 0 & 0 \\ 1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix}}$$

Partie 2

1) Soit $y \in E_x = \text{Vect}(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})$. *(Comme d'hab : on prend $f(y) \in f(E_x)$ et on montre que $f(y) \in E_x$.)*
Le vecteur y est une combinaison linéaire (la somme est donc finie) de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$y = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n x_n \qquad \text{avec} \qquad (\alpha_n) \in \mathbb{R}^{N+1}$$

Ainsi, $f(y) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n f(x_n) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n x_{n+1} \in E_x$
Conclusion : $\boxed{E_x \text{ est stable par } f}$

2) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ contenant x et stable par f.
Par une récurrence immédiate, F est stable par f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc $x \in F$ entraîne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = f^n(x) \in F$.
Comme F est un sous-espace vectoriel, F est stable par combinaison linéaire, donc

$$E_x = \text{Vect}(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}) \subset F$$

Conclusion : $\boxed{E_x \subset F}$

3) **a)** Comme $(x_n)_{0\leqslant n\leqslant d}$ est une famille de $d+1$ vecteurs de $\mathbb{R}^d$, de dimension d, elle est nécessairement liée.
De plus $x_0 = x \neq 0$, donc (x_0) est libre.
Donc l'ensemble $A = \{p \in \mathbb{N} | (x_0, \dots, x_{p-1}) \text{est libre}\}$ est non vide et majoré (par d), il admet un plus grand élément p.

b) Par définition de p, $(x_0, \dots, x_p)$ est liée : soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{p} \alpha_i x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad (\alpha_0, \dots, \alpha_p) \neq (0, \dots, 0)$$

Montrons par l'absurde que $\alpha_p \neq 0$: Supposons $\alpha_p = 0$. L'égalité ci-dessus s'écrit

$$\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i x_i = 0$$

Or $(x_0, \dots, x_{p-1})$ libre, donc $(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) = 0$: ainsi tous les α_i sont nuls, ce qui est absurde.
Donc $\alpha_p \neq 0$. En posant $a_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_p}$, l'égalité $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i x_i = 0$ s'écrit

$$\boxed{x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i}$$

c) On note $E'_x = \text{Vect}(x_0, \dots, x_{p-1})$. Montrer que E'_x est stable par f.

d) • $\boxed{\subset}$ D'après c), E'_x est stable par f. De plus, $x \in E'_x$ par construction. Donc d'après 2)

$$E_x \subset E'_x$$

On pouvait faire cette inclusion directement, mais on vous demande de déduire le résultat de la question précédente. D'ailleurs toujours traquer les questions **en déduire** *: souvent ce sont des questions relativement facile, qui teste votre capacité à lire l'énoncé.*

- $\boxed{\supset}$ Comme $\{x_0,\dots,x_{p-1}\}\subset\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, en passant aux espaces vectoriels engendrés :

$$E'_x\subset E_x$$

Conclusion : $\boxed{E_x=E'_x}$

Par construction de p, $\mathscr{B}_p$ est libre. Par construction de E'_x, $\mathscr{B}_p$ est génératrice de E'_x, c'est donc une base de E'_x.

Comme $E'_x=E_x$, $\boxed{\mathscr{B}_p=(x_0,\dots,x_{p-1}) \text{ est une base de } E_x}$

Là aussi, c'était faisable : juste glaner les informations.

4) *J'imagine – naïvement – que tout le monde saurait désormais faire cette question.*

Pour tout $i<p-1$, $f(x_i)=x_{i+1}$.

Pour $i=p-1$, $f(x_{p-1})=x_p=\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}a_ix_i$ d'après 3)b).

Ainsi,

$$M=\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&0&a_0\\ 1&\ddots&&\vdots&\vdots\\ 0&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&0&\vdots\\ 0&\cdots&0&1&a_{p-1}\end{pmatrix}$$

5) Soit $(\lambda_0,\dots,\lambda_{p-1})\in\mathbb{R}^p$ tels que

$$\sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i\widehat{f}^i=0$$

Par définition de $\widehat{f}$ et de x_i, $\widehat{f}^i(x)=x_i$ pour tout $i\in[\![0,p-1]\!]$. Donc en évaluant en x l'égalité précédente :

$$\sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i\widehat{f}^i(x)=\sum_{i=0}^{p-1}x_i=0$$

Or $\mathscr{B}_p=(x_0,\dots,x_{p-1})$ est libre par construction, donc $(\lambda_0,\dots,\lambda_{p-1})=(0,\dots,0)$.

Conclusion : $\boxed{\text{La famille } (\mathrm{id}_{E_x},\widehat{f},\widehat{f}^2,\dots,\widehat{f}^{p-1}) \text{ est une famille libre de } \mathscr{L}(E_x)}$

La première égalité porte sur des fonctions. Quand vous avez des fonctions, vous pouvez toujours les évaluer en une valeur bien choisie. Ici il n'y a qu'un élément de $\mathbb{R}^d$ qui a quelque chose de particulier : c'est x, choisi et fixé depuis le début.

6) **a)** Soit $k<p$. D'après 3)b),

$$x_p=\sum_{i=0}^{p-1}a_ix_i$$

En appliquant $\widehat{f}^k$, linéaire, il vient $\widehat{f}^k(x_p)=\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}a_i\widehat{f}^k(x_i)$

Comme $x_i=f^i(x)=\widehat{f}^i(x)$, l'égalité s'écrit $\widehat{f}^{k+p}(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}a_i\widehat{f}^{k+i}(x)$ puis

$$\boxed{\widehat{f}^p(x_k)=\sum_{i=0}^{p-1}a_i\widehat{f}^i(x_k)=a_0x_k+a_1\widehat{f}(x_k)+\cdots+a_{p-1}\widehat{f}^{p-1}(x_k)}$$

b) D'après la question précédente, pour tout $k\in[\![0,p-1]\!]$,

$$\widehat{f}^p(x_k)-a_{p-1}\widehat{f}^{p-1}(x_k)-\cdots-a_1\widehat{f}(x_k)-a_0\,\mathrm{id}_{E_x}(x_k)=0$$

Or $\mathscr{B}_p = (x_0, \dots, x_{p-1})$ est une base de E_x. L'endomorphisme $g = \widehat{f}^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i \widehat{f}^i$ de E_x étant nul sur une base de E_x, il est identiquement nul :

$$\boxed{\widehat{f}^p - a_{p-1}\widehat{f}^{p-1} - \cdots - a_1\widehat{f} - a_0 \operatorname{id}_{E_x} = 0}$$

Partie 3

1) Soit $x \in E$.

a) Comme $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$, en particulier $E = E_1 + \cdots + E_p$, donc

$$\boxed{\text{Il existe des vecteurs } x_i \in E_i \text{ tels que } x = \sum_{i=1}^{p} x_i}$$

Cette décomposition est unique par définition de la somme directe de p sous-espace vectoriel.

b) Soit $(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{R}^q$ tels que $\sum_{i=1}^{q} \mu_i x_i = 0$.

Comme $\mu_i x_i \in E_i$ et que $\bigoplus_{i=1}^{q} E_i$ (la somme des E_i est directe), pour tout $i \leqslant q$, $\mu_i x_i = 0$.
Or par hypothèse, $x_i \neq 0$ pour tout $i \leqslant q$. Donc $\mu_i = 0$ pour tout $i \leqslant q$.
Finalement, $\boxed{(x_1, \dots, x_q) \text{ est libre}}$

c) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad f^k(x) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i^k x_i$$

est vraie pour tout $k \in [\![0, q-1]\!]$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $f^0(x) = \operatorname{id}_E(x) = x = \sum_{i=1}^{q} x_i$ par définition de q et des x_i.

- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $k < q-1$ et $\mathcal{H}_k$ vraie : $f^k(x) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i^k x_i$. En appliquant f linéaire,

$$f^{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i^k f(x_i) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i^{k+1} x_i$$

  car $f(x_i) = \lambda_i x_i$ pour tout i. Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall k \in [\![0, q-1]\!] \qquad f^k(x) = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i^k x_i}$

d) *Il faut se laisser guider par l'enchaînement des questions qui précède. On vous a demandé de calculer $f^k(x)$, remplacez et regardez ce qui se passe.*

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(x) &= \alpha_0 \sum_{i=1}^{q} x_i + \alpha_1 \sum_{i=0}^{q} \lambda_i x_i + \cdots + \alpha_{q-1} \sum_{i=0}^{q} \lambda_i^{q-1} x_i \\
&= \sum_{i=1}^{q} \Big[\alpha_0 x_i + \alpha_1 \lambda_i x_i + \cdots + \alpha_{q-1} \lambda_i^{q-1} x_i\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{q} \Big[\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i + \cdots + \alpha_{q-1} \lambda_i^{q-1}\Big] x_i \\
&= \sum_{i=1}^{q} \Big[P(\lambda_i)\Big] x_i
\end{aligned}$$

Or d'après 1)b) la famille $(x_1, \ldots, x_q)$ est libre :

$$\sum_{i=1}^{q} \Big[P(\lambda_i)\Big] x_i \Longrightarrow \forall i \in [\![1,q]\!]\ P(\lambda_i) = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{Le polynôme } P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{q-1} X^{q-1} \text{ admet } \lambda_1, \ldots, \lambda_q \text{ comme racines}}$

e) Supposons qu'il existe des réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_{q-1}$ tels que

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(x) = 0$$

D'après la question précédente, le polynôme $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{q-1} X^{q-1}$ de degré $q-1$ admet q racines. Donc c'est le polynôme nul :

$$P = 0$$

Toujours le même gag avec les polynômes : compter les racines, et jeter un coup d'oeil au degré. S'il y en a trop, bim ! $P = 0$.

Donc tous les coefficients sont nuls : $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{q-1}) = (0, \ldots, 0)$.

Conclusion : $\boxed{\text{La famille } (x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)) \text{ est libre}}$

f) Montrons que la famille de $q+1$ vecteurs $(x, \ldots, f^q(x))$ est liée.

D'après 1)c), $\forall k < q,\ f^k(x) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^k x_i \in \mathrm{Vect}\left(\{x_i | 1 \leqslant i \leqslant q\}\right.$.

Donc $(x, f(x), \ldots, f^q(x))$ est une famille du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_q)$.

Or d'après 1)b), $\dim \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_q) = q$ car la famille $(x_1, \ldots, x_q)$ est libre.

Donc il y a « trop » de vecteurs dans la famille $(x, f(x), \ldots, f^q(x))$: la famille est liée.

Comme de plus $(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x))$ est libre, q est le plus grand entier p tel que $(x, \ldots, f^{p-1}(x))$ soit libre. D'après le résultat de la question Partie 2, 3)d) – les résultats de la partie 2 restent valable sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie quelconque,

$$\boxed{E_x = \mathrm{Vect}\,(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x))}$$

On a donc montré ci-dessus que $E_x = \mathrm{Vect}\,(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)) \subset \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_p)$. Or les deux familles sont libres, par conséquent,

$$\dim \mathrm{Vect}\,(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x)) = q = \dim \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_q)$$

Donc par inclusion et égalité des dimensions (et comme $x_{q+1} = \cdots = x_p = 0$),

$$\boxed{E_x = \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_q) = \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_p)}$$

2) D'après Partie 2, 2), qui reste valable, $E_x \subset F$. Ce qui signifie, d'après 1)f),

$$\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_p) \subset F$$

Donc en particulier, comme $x_i \in \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_p)$,

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \qquad x_i \in F$$

Comme $x_i \in E_i$ par construction, il vient

$$\boxed{\forall i \in [\![1,p]\!] \qquad x_i \in F_i}$$

Exercice 2 (PT 2013 C)

1) La fonction sin est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est cos, qui est bornée (en valeurs absolues) par 1. Donc l'inégalité des accroissements finis entre 0 et $t \in \mathbb{R}_+^*$ s'écrit

$$|\sin(t) - \sin(0)| \leqslant 1 \times |t - 0|$$

Ainsi, en divisant par $t > 0$, $\boxed{\text{Pour tout réel } t \text{ strictement positif, } \frac{|\sin t|}{t} \leqslant 1}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

- <u>Étude de f</u> : La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{e^{-xt} \sin t}{t}$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

  En 0 : $\left|\dfrac{e^{-xt} \sin t}{t}\right| \sim e^{-xt} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 1$ donc la fonction φ est prolongeable par continuité en 0, et l'intégrale converge.

  En $+\infty$: D'après 1), $\dfrac{|\sin t|}{t} \leqslant 1$ donc $|\varphi(t)| \leqslant e^{-xt}$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après le critère des exponentielles ($x > 0$).

  Conclusion : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} \mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente, et $f(x)$ existe.

- <u>Étude de g</u> : La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt} \cos t}{x}$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

  De plus, $\left|\dfrac{e^{-xt} \cos t}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x} e^{-xt}$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ d'après le critère des exponentielles ($x > 0$).

  Conclusion : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \cos t}{x} \mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente, et $g(x)$ existe.

Finalement : $\boxed{\text{Les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont définies sur } \mathbb{R}_+^*}$

3) Soit a un réel strictement positif. Appliquons le théorème de Leibniz de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre sur l'intervalle $D = [a, +\infty[$, qui nous donne directement que la fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ (et donc continue).

Soit $h : [a, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \dfrac{e^{-xt} \sin t}{t}$.

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ car exponentielle l'est.
- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après 2).

  Pour tout $x \in [a, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \dfrac{-te^{-xt} \sin t}{t} = -e^{-xt} \sin t$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $\varphi(t) = e^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après le critère des exponentielles ($a > 0$) et

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times]0, +\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)\right| = |\sin t| e^{-xt} \leqslant e^{-at} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a, +\infty[\text{ et } f'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t \, \mathrm{d}t.}$$

On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \cos t}{x} \mathrm{d}t = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos t \, \mathrm{d}t$ (par linéarité).

Nous allons avoir besoin de la fonction $\varphi(t) = te^{-at}$, définie sur $[0, +\infty[$. φ est continue par morceaux, et par croissance comparée, comme $a > 0$,

$$t^2 \varphi(t) = t^3 e^{-at} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc par définition de la limite, il existe $t_0 > 0$ tel que $\forall t \geqslant t_0$, $|t^2\varphi(t)| \leqslant 1$, puis $|\varphi(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.
Or $\dfrac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par majoration φ est intégrable.
Évitez de mettre la preuve de l'intégrabilité de la fonction φ au milieu du théorème, lorsqu'il y a plus d'un mot à dire (par exemple, au-dessus, c'est immédiat (critère des exponentielles), pas de problème).
Soit $h : [a,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = e^{-xt}\cos t$.

- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ car exponentielle l'est.
- Pour tout $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après 2).

  Pour tout $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -te^{-xt}\cos t$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- La fonction $\varphi(t) = te^{-at}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (ci-dessus) et

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = te^{-xt}|\cos t| \leqslant te^{-at} = \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\cos t\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto -\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-xt}\cos t\,dt$.
Ainsi, comme produit de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ ($x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $\mathscr{C}^1$),

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [a,+\infty[.}$$

4) Comme f et g sont $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, elles sont $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Soit $x > 0$ fixé.
Pour $X > 0$, on intègre par partie :

$$\int_0^X \frac{e^{-xt}\cos t}{x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-xt}\sin t}{x}\right]_0^X + \int_0^X e^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t = \underbrace{\frac{e^{-xX}\sin X}{x}}_{\xrightarrow[X\to+\infty]{}0} + \int_0^X e^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t$$

J'insiste lourdement : il ne s'agit **pas** *de $f'(x)$ et $g(x)$ pour l'instant !*
Donc en passant à la limite pour $X \to +\infty$:

$$\boxed{f'(x) = -g(x)}$$

5) *Les questions de calculs d'intégrales ne sont jamais complètement affreuses. On peut s'en sortir par une IPP, mais le calcul direct comme en sup marche aussi.*
Soit $x > 0$. $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,\mathrm{d}t$, c'est donc la partie imaginaire de l'intégrale de $e^{-xt}e^{it} = e^{(-x+i)t}$, que l'on peut sortir de l'intégrale par linéarité et continuité de la partie imaginaire. De plus

$$\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{-x+i}$$

Il ne reste plus qu'à prendre la partie imaginaire de $\dfrac{1}{-x+i} = \dfrac{-x-i}{(-x+i)(-x-i)} = \dfrac{-x-i}{1+x^2}$:

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}}$$

6) Au 2), nous avions montré (à l'aide du 1)) que $\left|\dfrac{e^{-xt}\sin t}{t}\right| \leqslant e^{-xt}$. Donc

$$|f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{e^{-xt}\sin t}{t}\right| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Par majoration, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

Jusqu'ici, le sujet pose les mêmes questions que l'exercice 28. Transformée de Laplace... No comment.

7) D'après 5), f est une primitive[1] de $-\dfrac{1}{1+x^2}$, donc de la forme $K - \operatorname{Arctan} x$.

De plus, d'après 6), $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 = K - \dfrac{\pi}{2}$, donc $K = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x}$$

8) Pour tout $t \in]0, +\infty[$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-xt}\sin t}{t} = \frac{e^{-0t}\sin t}{t} = \frac{\sin t}{t}$$

Donc, d'après l'énoncé, on a admis que, sous réserve d'existence,

$$\lim_{x\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

De plus, d'après 7), pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$. Ainsi

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} 0 = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

1. *Vous savez, le truc défini à une* CONSTANTE *près*