Lycée La Prat's
Classe de PT

Vendredi 13 novembre 2015

Épreuve de Mathématiques 3

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Indication : *La matrice A d'une application linéaire $u : E \to E'$ dans une base $\mathscr{B}$ au départ et $\mathscr{B}'$ à l'arrivée consiste à décomposer l'image par u des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$:*

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i$$

Partie 1

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -16 & 7 & -4 \\ 9 & -3 & -4 & -7 \\ 7 & -4 & -7 & -16 \\ -4 & -7 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1) **a)** Calculer $f(e_1)$ et $f^2(e_1)$.

b) Montrer que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est liée.

2) Montrer de même que la famille $(e_2, f(e_2), f^2(e_2))$ est liée.

3) Montrer que la famille $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.

4) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $f^2(x) + 10f(x) + 100x = 0$.

5) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Partie 2

On se place maintenant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^d$.
Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0 & = & x \\ \forall n \geqslant 0 \quad x_{n+1} & = & f(x_n) \end{array}\right.$$

On note $E_x = \operatorname{Vect}\left(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}\right)$.

1) Montrer que E_x est stable par f.

2) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ contenant x et stable par f. Montrer que $E_x \subset F$.

3) Soit p le plus grand entier tel que $(x_0, \ldots, x_{p-1})$ soit une famille libre.

a) Justifier l'existence d'un tel p.

b) Montrer qu'il existe des réels $a_0, \ldots, a_{p-1}$ tels que

$$x_p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i x_i$$

c) On note $E'_x = \operatorname{Vect}(x_0, \ldots, x_{p-1})$. Montrer que E'_x est stable par f.

d) En déduire que $E_x = E'_x$ et que la famille $\mathscr{B}_p = (x_0, \ldots, x_{p-1})$ est une base de E_x.

4) On note $\widehat{f}$ l'endomorphisme de E_x obtenu comme restriction de f à E_x.
Donner la matrice de $\widehat{f}$ dans la base $\mathscr{B}_p$.

5) Montrer que la famille $(\operatorname{id}_{E_x}, \widehat{f}, \widehat{f}^2, \ldots, \widehat{f}^{p-1})$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E_x)$.

6) **a)** Montrer que pour tout $k < p$,

$$\widehat{f}^p(x_k) = a_0 x_k + a_1 \widehat{f}(x_k) + \cdots + a_{p-1} \widehat{f}^{p-1}(x_k)$$

b) En déduire que l'on a

$$\widehat{f}^p - a_{p-1}\widehat{f}^{p-1} - \cdots - a_1 \widehat{f} - a_0 \operatorname{id}_{E_x} = 0$$

Partie 3

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et f un endomorphisme de E.
Soit λ_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ des réels deux à deux distincts et E_i des sous-espaces vectoriels de E tels que

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$$

et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\forall x \in E_i,\ f(x) = \lambda_i x$.

1) Soit $x \in E$.

a) Montrer qu'il existe des vecteurs $x_i \in E_i$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$.

Cette décomposition est-elle unique ?

b) Notons q le nombre de vecteurs x_i non nuls dans la décomposition précédente et supposons pour simplifier que ce sont les q premiers. Montrer que $(x_1, \ldots, x_q)$ forme une famille libre.

c) Exprimer $f^k(x)$ pour $1 \leqslant k \leqslant q-1$ en fonction des $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$.

d) Supposons qu'il existe des réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_{q-1}$ tels que

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{q-1} f^{q-1}(x) = 0$$

Montrer que le polynôme $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{q-1} X^{q-1}$ admet $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ comme racines.

e) Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x))$ est libre.

f) Montrer que $E_x = \operatorname{Vect}(x, f(x), \ldots, f^{q-1}(x))$ puis que $E_x = \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$.

2) Soit F un sous-espace vectoriel stable par f. On note $F_i = F \cap E_i$. Soit $x \in F$. On décompose x comme précédemment :

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i$$

avec $x_i \in E_i$.
Déduire de la question précédente que $x_i \in F_i$.

Exercice 2

On considère les fonctions f et g, respectivement définies par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\, \mathrm{d}t \qquad , \qquad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\cos t}{x}\, \mathrm{d}t$$

1) Monter que, pour tout réel t strictement positif, $\dfrac{|\sin t|}{t} \leqslant 1$.

2) Montrer que f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Soit a un réel strictement positif. Étudier la continuité et la dérivabilité de f et g sur $[a, +\infty[$.

4) Pour tout réel $x > 0$, comparer $f'(x)$ et $g(x)$.
(On pensera à remarquer que $g(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \displaystyle\int_0^{X} \frac{e^{-xt}\cos t}{x}\, \mathrm{d}t$ afin de pouvoir intégrer par parties, ou appliquer proprement le théorème d'intégration par partie).

5) Montrer que, pour tout réel strictement positif x :

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

6) Montrer que f a une limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$.

7) Déduire des questions précédentes l'expression de $f(x)$ pour tout réel strictement positif x.

8) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ converge.

9) On admet que $\lim\limits_{x \to 0} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim_{x \to 0} \frac{e^{-xt}\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$.
Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$?

FIN DE L'ÉPREUVE