

Épreuve de Mathématiques 2

Correction

Exercice 1 (PT 2007 C)

On considère l'application ψ définie pour tout réel x par

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\text{ch } t} \, \mathrm{d}t$$

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(xt)}{\text{ch } t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Étude en $+\infty$:

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad \left| \frac{\cos(xt)}{\text{ch } t} \right| \leqslant \frac{1}{\text{ch } t}$$

Et de plus $\dfrac{1}{\text{ch } t} = \dfrac{2}{e^t + e^{-t}} \sim \dfrac{2}{e^t} = 2e^{-t}$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2e^{-t} \, \mathrm{d}t$ converge ($1 > 0$), donc, par équivalence, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\text{ch } t} \, \mathrm{d}t$ aussi, puis, par majoration

$$\boxed{\psi(x) \text{ converge absolument donc converge}}$$

2) **a)** Soit $X \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $X \neq -1$, la somme des termes d'une suite géométrique s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{N} (-X)^k = \frac{1 - (-X)^{N+1}}{1 - (-X)} = \frac{1}{1 + X} - \frac{(-1)^{N+1} X^{N+1}}{1 + X}$$

En conclusion, $\boxed{\forall X \in \mathbb{R} - \{-1\} \ \forall N \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{1+X} = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k X^k \right) + \dfrac{(-1)^{N+1} X^{N+1}}{1 + X}}$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. La formule de la question 2)a), avec $X = e^{-2t}$ (> 0 donc $\neq -1$), s'écrit

$$\frac{1}{1 + e^{-2t}} = \left(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k (e^{-2t})^k \right) + \frac{(-1)^{N+1} (e^{-2t})^{N+1}}{1 + (e^{-2t})}$$

Donc $\dfrac{1}{\text{ch } t} = \dfrac{2}{e^t + e^{-t}} = \dfrac{2e^{-t}}{1 + e^{-2t}} = 2e^{-t} \left[\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k e^{-2kt} \right) + \dfrac{(-1)^{N+1} e^{-2(N+1)t}}{1 + e^{-2t}} \right]$

c) En remplaçant $\dfrac{1}{\text{ch } t}$ par la formule trouvée en 2)b) dans l'expression de ψ, on trouve que, pour tout réel x et tout entier naturel strictement positif N

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \qquad \psi(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) \left[\left(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k e^{-2kt} \right) + \frac{(-1)^{N+1} e^{-2(N+1)t}}{1 + e^{-2t}} \right] \mathrm{d}t}$$

3) **a)** La fonction $t \mapsto e^{-t}\cos(xt)\dfrac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

<u>Étude en $+\infty$</u> : Comme $|\cos| \leqslant 1$, il vient

$$\forall t \in [0,+\infty[, \qquad \left|e^{-t}\cos(xt)\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right| \leqslant \frac{e^{-2(N+2)t}}{1+e^{-2t}}$$

De plus $\dfrac{e^{-2(N+2)t}}{1+e^{-2t}} \sim \dfrac{e^{-2(N+2)t}}{1} = e^{-2(N+2)t}$. Or $2(N+2) > 0$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2(N+2)t}\,\mathrm{d}t$ converge, et par comparaison $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2(N+2)t}}{1+e^{-2t}}\,\mathrm{d}t$. Puis, par majoration,

$$\boxed{R_N(x) \text{ converge absolument donc converge}}$$

b) Pour tout $t \in [0,+\infty[$, $e^{-2t} \geqslant 0$ et $e^{-t} \leqslant 1$ donc

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[\qquad |h(x,t)| = \left|\frac{e^{-t}\cos(xt)}{1+e^{-2t}}\right| \leqslant \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} \leqslant 1$$

$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est bornée par 1 sur } \mathbb{R}\times[0,+\infty[.}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la majoration trouvée en 3)b),

$$\forall t \in [0,+\infty[\quad \forall N \in \mathbb{N}^* \qquad \left|e^{-t}\cos(xt)\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right| = |h(x,t)|e^{-2(N+1)t} \leqslant e^{-2(N+1)t}$$

Or $t \mapsto e^{-2(N+1)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc, en intégrant, l'inégalité s'écrit :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \qquad |R_N(x)| \leqslant \int_0^{+\infty}\left|e^{-t}\cos(xt)\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-2(N+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(N+1)}$$

Or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2(N+1)} = 0$, donc en conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{N\to+\infty} R_N(x) = 0.}$

4) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés.

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\cos(xt)e^{-(2k+1)t} = 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $|\cos(xt)e^{-(2k+1)t}| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et est intégrable.

Passons par les complexes : $\cos(xt) = \Re\left(e^{ixt}\right)$. Par linéarité de l'intégrale,

$$J_k(x) = \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1-ix)t}\,\mathrm{d}t\right) = \Re\left[-\frac{1}{2k+1-ix}e^{-(2k+1-ix)t}\right]_0^{+\infty} = \Re\left(\frac{1}{2k+1-ix}\right)$$

En Conclusion, $\boxed{J_k(x) = \dfrac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}.}$

(On pouvait aussi faire deux intégrations par parties.)

5) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après 2)c), $\psi(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k e^{-t}\cos(xt)e^{-2kt}\right) + e^{-t}\cos(xt)\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right]\mathrm{d}t$.

Or chacun des termes de cette somme est intégrable (questions 3)b) et 4)), donc en utilisant la linéarité de l'intégrale, il vient

$$\psi(x) = 2\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k J_k(x)\right) + 2R_N(x) = \left(\sum_{k=0}^{N} 2(-1)^k\frac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}\right) + 2R_N(x)$$

Or, d'après 3)b), $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} R_N(x) = 0$, donc la série $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{N} 2(-1)^k\frac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\psi(x)$.

En résumé, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N} u_k(x) \text{ avec } u_k(x) = 2(-1)^k\frac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}.}$

Exercice 2 (PT 2016)

1) Pour tout réel x,

$$x^2+2\lambda x+\mu = x^2+2\lambda x+\lambda^2-\lambda^2+\mu = (x+\lambda)^2-\lambda^2+\mu$$

Posons $\alpha=\mu-\lambda^2>0$ et $\beta=\dfrac{1}{\sqrt{\mu-\lambda^2}}$. Alors

$$x^2+2\lambda x+\mu=\alpha\left(\frac{1}{\alpha}(x+\lambda)^2+1\right)=\alpha\Big(1+\beta^2(x+\lambda)^2\Big)$$

En conclusion, $\boxed{\alpha=\mu-\lambda^2 \text{ et } \beta=\dfrac{1}{\sqrt{\mu-\lambda^2}} \text{ vérifient } x^2+2\lambda x+\mu=\alpha\Big(1+\beta^2(x+\lambda)^2\Big)}$

2) Soit $f : x\mapsto \dfrac{1}{(x^2+2\lambda x+\mu)^{n+1}}$.

Comme le discriminant $\Delta=4\lambda^2-4\mu<0$ par hypothèse, $x^2+2\lambda x+\mu$ ne s'annule jamais et la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Étude en $+\infty$: $f(x)\sim\dfrac{1}{x^{2n+2}}$

Or $n\geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2n+2}}\,\mathrm{d}x$ converge comme intégrale de Riemann ($\alpha=2n+2\geqslant 2>1$).

Donc, par équivalence, $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.

Étude en $-\infty$: De même, $f(x)\sim\dfrac{1}{x^{2n+2}}$

Or $n\geqslant 0$, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{|x|^{2n+2}}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2n+2}}\,\mathrm{d}x$ converge comme intégrale de Riemann ($\alpha=2n+2\geqslant 2>1$).

Donc, par équivalence, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}f(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.

En conclusion, $\boxed{I_n \text{ converge}}$

Calcul de I_0 : $\dfrac{1}{x^2+2\lambda x+\mu}=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{1+\Big(\beta(x+\lambda)\Big)^2}$ d'après 1), avec $\alpha=\dfrac{1}{\beta^2}$. Donc

$$I_0=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2\lambda x+\mu}=\beta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta\,\mathrm{d}x}{1+\Big(\beta(x+\lambda)\Big)^2}=\beta\Big[\mathrm{Arctan}\,\Big(\beta(x+\lambda)\Big)\Big]_{-\infty}^{+\infty}=\beta\pi$$

Conclusion : $\boxed{I_0=\beta\pi}$

3) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $u=x$ et $v=\dfrac{1}{(x^2+1)^n}$. Comme $uv\sim_\infty\dfrac{1}{x^{2n-1}}$ avec $2n-1>0$, il vient

$$\lim_{x\to+\infty}uv=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty}uv=0$$

D'où l'intégration par partie suivante :

$$I_{n-1}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}=\left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-2nx^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x=2n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

Or $\forall x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}=\dfrac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}=\dfrac{1}{(x^2+1)^n}-\dfrac{1}{(x^2+1)^{n+1}}$, donc

$$I_{n-1}=2n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}-\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x=2nI_{n-1}-2nI_n$$

Par conséquent, $\boxed{I_n=\dfrac{(2n-1)\,I_{n-1}}{2n}}$

b) *Cherchez au brouillon pour les premiers termes, comme d'habitude. Une fois que vous avez une formule bien propre, comme vous l'avez obtenu avec des « ... », il faut faire une récurrence.*

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: d'après 2), $I_0 = \beta\pi$, et ici $\beta = 1$. Ainsi $\dfrac{(2\times 0)!}{2^0(0!)^2}\pi = \pi = I_0$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après a),

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n = \frac{2n(2n-1)}{2^2n^2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi = \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}\pi$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi}$

Pour compléter un peu les résultats de l'exercice, et confirmer votre impression de « déjà vu », on peut effectuer le changement de variable $x = \tan t$ dans I_n.
Comme $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ et $(1+x^2)^{n+1} = (1+\tan^2 t)^{n+1} = (1/\cos^2 t)^{n+1}$, on trouve

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2} t \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t = 2W_{2n}$$

Wallis !

Exercice 3 (HEC B/L 2016)

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $g : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[x, +\infty[$.

Étude en $+\infty$: $t^2 g(t) = t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée.

Donc $g(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$

Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ absolument donc converge.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ l'intégrale } \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente}}$

Comme $x \mapsto e^{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$, $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

2) *Du x dans les bornes et uniquement dans les bornes : prendre une primitive de ce qu'il y a à l'intérieur.*

Soit G_0 la primitive de $g : t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 0. Notons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Alors, par Chasles,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^0 g(t)\,\mathrm{d}t + I = -G_0(x) + I$$

Une primitive étant définie à une constante près, on peut choisir une primitive G de g telle que $G = G_0 - I$. Dans ce cas,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = e^{x^2}\int_x^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = -e^{x^2}G(x)$$

Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, comme composée de fonctions $\mathscr{C}^1$, $\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

De plus, comme $G' = g$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = -2xe^{x^2}G(x) - e^{x^2}G'(x) = 2xf(x) - e^{x^2}e^{-x^2}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = -1 + 2xf(x)}$$

3) **a)** Pour tout $x > 0$, posons $\varphi(x) = -G(x) - \dfrac{1}{2}x^{-1}e^{-x^2}$. φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car composée de fonctions $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \varphi'(x) = -g(x) + \frac{1}{2}x^{-2}g(x) + g(x) = \frac{1}{2x^2}e^{-x^2} > 0$$

Donc φ croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 0$ comme reste d'une intégrale convergente, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$
φ	$\nearrow$ 0

Donc $\varphi \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est-à-dire

$$\boxed{\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2x}e^{-x^2} \leqslant 0}$$

b) Soit $x \geqslant 0$. Comme $2xe^{x^2} \geqslant 0$, l'inégalité obtenue au 3)a) nous donne

$$\boxed{2xf(x) \leqslant 1}$$

c) Comme $x > 0$, L'inégalité 3)b) s'écrit $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$. Or $t \mapsto e^{-t^2}$ et $x \mapsto e^{x^2}$ sont positives sur $\mathbb{R}$ donc on a l'encadrement

$$\forall x \in R \qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2x}$$

Ainsi, par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, d'après 2), $f'(x) = -1 + 2xf(x)$, et, d'après 3)b), $2xf(x) \leqslant 1$. Donc $f' \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus $f'(0) = -1$, donc en conclusion $\boxed{f' \leqslant 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+}$

4) **a)** *La méthode habituelle – continuité, étude aux points où il y a des problèmes – fonctionne toujours, mais changeons un peu.*
Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est paire, et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après 1), $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge aussi.
En conclusion,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge et } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}}$$

b) Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, par définition $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}$.
De plus, $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue, positive, et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, donc $\ell > 0$.
Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x^2}\ell = +\infty$. Conclusion

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = e^{x^2}\displaystyle\int_{-x}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Effectuons le changement de variable $u = -t$, qui est continu, strictement monotone, bijectif, de $[-x, +\infty[$ sur $]-\infty, x]$.

$$\int_{-x}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{x}^{-\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}u$$

Ainsi, $f(x)+f(-x) = e^{x^2}\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}u + \int_{x}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right) = e^{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}e^{x^2}$. Conclusion

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) + f(-x) = \sqrt{\pi}e^{x^2}}$$

d) En dérivant l'expression trouvée au 4)c) il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(-x) = f'(x) - 2x\sqrt{\pi}e^{x^2} \leqslant 0$$

Conclusion : $\boxed{f' \leqslant 0 \text{ sur } \mathbb{R}_-}$

5) **a)** *C'est la même idée que le $t = t + 1 - 1$: on fait apparaître le u' du $u'e^u$.*
Soit $x > 0$. Comme, pour tout $t \geqslant x$, $e^{-t^2} = -\dfrac{1}{2t}\Big(-2te^{-t^2}\Big)$, posons

$$\begin{array}{ll} u = -\dfrac{1}{2t} & u' = \dfrac{1}{2t^2} \\ v = e^{-t^2} & v' = -2te^{-t^2} \end{array}$$

Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} uv = 0$, on effectue l'intégration par partie entre x et $+\infty$:

$$\int_{x}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2t}e^{-t^2}\right]_x^{+\infty} - \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{2t^2}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x^2}}{2x} + \frac{1}{4}\int_{x}^{+\infty} \frac{-2te^{-t^2}}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^3} = 0$, on effectue une nouvelle intégration par parties :

$$\int_{x}^{+\infty} \frac{-2te^{-t^2}}{t^3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-t^2}}{t^3}\right]_x^{+\infty} - \int_{x}^{+\infty} -3\frac{e^{-t^2}}{t^4}\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-x^2}}{x^3} + 3\int_{x}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,\mathrm{d}t$$

En conclusion, lorsqu'on remplace dans l'expressions de $f(x)$, il vient

$$\boxed{\forall x > 0 \qquad f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + \frac{3e^{x^2}}{4}\int_{x}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,\mathrm{d}t}$$

b) *But : $2xf(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Problème : l'intégrale. Solution : majorer pour se ramener à une intégrale connue, typiquement celle de e^{-t^2}. Garder seulement $1/t^4$ ne suffirait pas à compenser le e^{x^2}.*
Soit $x > 0$. Pour tout $t \geqslant x$,

$$t \geqslant x > 0 \Longrightarrow 0 < \frac{1}{t^4} \leqslant \frac{1}{x^4} \Longrightarrow 0 < \frac{e^{-t^2}}{t^4} \leqslant \frac{e^{-t^2}}{x^4}$$

Donc, par croissance de l'intégrale entre x et $+\infty$: $0 \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{x^4}\,\mathrm{d}t$ (toutes les intégrales convergent d'après ci-dessus) puis

$$0 \leqslant \frac{3xe^{x^2}}{2}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{3}{2x^3}e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2x^3}f(x)$$

Or, d'après 3)c), $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3e^{x^2}}{4}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,\mathrm{d}t = 0$

D'où, d'après 5)a), $2xf(x) = 1 - \dfrac{1}{2x^2} + o(1) = 1 + o(1)$, puis

$$\boxed{f(x) \sim \frac{1}{2x}}$$

6) a) Pour tout $n \geqslant 1$ on pose $\mathcal{H}_n$: f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$ est vraie d'après 2).
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après 2), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -1 + 2xf(x)$. Or f est $\mathscr{C}^n$. Donc f' est $\mathscr{C}^n$, donc f est $\mathscr{C}^{n+1}$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad f \text{ est de classe } \mathscr{C}^n \text{ sur } \mathbb{R}}$

C'est une récurrence immédiate. Mais la faire prend 4 lignes : autant l'écrire.

En conclusion : $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

b) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \exists (P_n, Q_n) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad f^{(n)} = P_n f + Q_n$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $P_0 = 1$ et $Q_0 = 0$ conviennent : $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Soit P_n et Q_n deux polynômes qui conviennent :

$$f^{(n)} = P_n f + Q_n$$

Comme f est $\mathscr{C}^\infty$ d'après 6)a), on peut dériver :

$$f^{(n+1)} = P_n' f + P_n f' + Q_n'$$

Or d'après 2), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2xf(x) - 1$. En remplaçant dans l'expression ci-dessus

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n+1)}(x) = P_n'(x)f(x) + 2xP_n(x)f(x) - P_n(x) + Q_n'(x)$$

Donc en posant $P_{n+1} = P_n' + 2XP_n$ et $Q_{n+1} = -P_n + Q_n'$, qui sont deux polynômes, il vient

$$f^{(n+1)} = P_{n+1} f + Q_{n+1}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad \exists (P_n, Q_n) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad f^{(n)} = P_n f + Q_n}$

De plus les suites (P_n) et (Q_n) sont définies par

$$\boxed{\begin{cases} P_0 = 1 \\ Q_0 = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} P_{n+1} = P_n' + 2XP_n \\ Q_{n+1} = Q_n' - P_n \end{cases}}$$

c) *Pour ce genre de questions, la méthode est toujours la même : tester pour les premiers termes, conjecturer la réponse (tout ça au brouillon évidemment), puis formaliser sous la forme $P_n = a_d X^d + \widetilde{P}_n$ avec $\deg \widetilde{P}_n \leqslant d-1$, et le montrer par récurrence.*

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \qquad \exists (\widetilde{P}_n, \widetilde{Q}_n) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \begin{cases} P_n = 2^n X^n + \widetilde{P}_n & \text{et} \quad \deg \widetilde{P}_n \leqslant n-1 \\ Q_n = -2^{n-1} X^{n-1} + \widetilde{Q}_n & \text{et} \quad \deg \widetilde{Q}_n \leqslant n-2 \end{cases}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: D'après b), $P_1 = 2X$ et $Q_1 = P_0 = 1$, donc $\widetilde{P}_1 = \widetilde{Q}_1 = 0$ conviennent.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Soit $\widetilde{P}_n$ et $\widetilde{Q}_n$ deux polynômes qui conviennent :

$$\begin{cases} P_n = 2^n X^n + \widetilde{P}_n \\ \deg \widetilde{P}_n \leqslant n-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Q_n = -2^{n-1} X^{n-1} + \widetilde{Q}_n \\ \deg \widetilde{Q}_n \leqslant n-2 \end{cases}$$

En utilisant les formules de récurrence trouvée au b)

$$P_{n+1} = P_n' + 2XP_n = 2^n n X^{n-1} + \widetilde{P}_n' + 2^{n+1} X^{n+1} + 2X\widetilde{P}_n = 2^{n+1} X^{n+1} + \widetilde{P}_{n+1}$$

Où $\widetilde{P}_{n+1} = 2^n n X^{n-1} + \widetilde{P}_n' + 2X\widetilde{P}_n$. Comme $\deg \widetilde{P}_n' = \deg \widetilde{P}_n - 1 \leqslant n-2$ et $\deg 2X\widetilde{P}_n = 1 + \deg \widetilde{P}_n = n$, on a $\deg \widetilde{P}_{n+2} \leqslant \min(n-1, n-2, n) = n$.

De même, pour Q_{n+1},

$$Q_{n+1} = Q_n' - P_n = -2^{n-1}(n-1)X^{n-2} + \widetilde{Q}_n' - 2^n X^n - \widetilde{P}_n = -2^n X^n + \widetilde{Q}_{n+1}$$

Où $\widetilde{Q}_{n+1} = -2^{n-1}(n-1)X^{n-2} + \widetilde{Q}_n' - \widetilde{P}_n$. Comme $\deg P_n \leqslant n-1$ et que les autres sont de degré strictement inférieurs, $\deg \widetilde{Q}_{n+1} \leqslant n-1$.

Ainsi, il vient

$$\exists (\widetilde{P}_{n+1}, \widetilde{Q}_{n+1}) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \begin{cases} P_{n+1} = 2^{n+1} X^{n+1} + \widetilde{P}_{n+1} & \text{et} \quad \deg \widetilde{P}_{n+1} \leqslant n \\ Q_{n+1} = -2^n X^n + \widetilde{Q}_{n+1} & \text{et} \quad \deg \widetilde{Q}_{n+1} \leqslant n-1 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0\ \exists (\widetilde{P}_n, \widetilde{Q}_n) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \begin{cases} P_n = 2^n X^n + \widetilde{P}_n & \text{et} \quad \deg \widetilde{P}_n \leqslant n-1 \\ Q_n = -2^{n-1} X^{n-1} + \widetilde{Q}_n & \text{et} \quad \deg \widetilde{Q}_n \leqslant n-2 \end{cases}}$

Donc, pour $n \geqslant 1$, les termes de plus haut degré de P_n et Q_n sont respectivement 2^n et -2^{n-1}.

7) a) D'après 2), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2xf(x) - 1$. En notant $g : x \mapsto x$, la formule de dérivation de Leibniz nous donne

$$\forall n \geqslant 1\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n+1)} = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$$

Or $g'(x) = 1$ et, pour tout $k > 1$, $g^{(k)}(x) = 0$. Donc

$$\forall n \geqslant 1\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n+1)} = 2\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x) = 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x)$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n+1)}(x) = 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x)}$$

b) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, donc elle admet un développement de Taylor-Young au voisinage de 0 à tout ordre n qui s'écrit

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \qquad \text{avec} \qquad \forall k \in \mathbb{N}\ a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}$$

Ainsi, $a_0 = f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et $a_1 = f'(0)$ or $f'(x) = 2xf(x) - 1$ donc $a_1 = -1$. D'après a)

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad a_{k+1} = \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} = \frac{2k}{(k+1)!}f^{(k-1)}(0) = \frac{2k}{k(k+1)}a_{k-1} = \frac{2}{k+1}a_{k-1}$$

En conclusion

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ a_1 = -1 \end{array}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \begin{array}{l} a_{2k+1} = \frac{1}{k+1}a_{2k-1} \\ a_{2k+2} = \frac{2}{2k+3}a_{2k} \end{array}}$$

c) Il faut montrer par récurrence que $a_{2k+1} = -\frac{1}{(k+1)!}$ et $a_{2k} = \frac{2^{2k-1}k!\sqrt{\pi}}{(2k+1)!}$.

Au brouillon, les a_{2k+1} sont immédiats. Pour les a_{2k}, après les tests sur les premiers termes etc on trouve $a_{2k} = \left(\prod_{p=1}^{k} \frac{2}{2p+1}\right) a_0$ puis on écrit

$$\prod_{p=1}^{k} \frac{2}{2p+1} = \prod_{p=1}^{k} \frac{2 \times 2p}{2p(2p+1)} = 2^{2k} \frac{\prod_{p=1}^{k} p}{\prod_{p=1}^{k} 2p(2p+1)} = \frac{2^{2k}p!}{(2p+1)!}$$

Exercice 4 (PT 2010 C)

1) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, posons $f(x) = \frac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x}$. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.

Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$ donc $0 < 1 + x^\beta \cos^2 x \leqslant 1 + x^\beta$, et en passant à l'inverse

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x} \geqslant \frac{1}{1 + x^\beta} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^\beta}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}$ est une intégrale de Riemann divergente ($\beta \leqslant 1$), donc

$$\boxed{\text{L'intégrale de } f \text{ diverge en } +\infty.}$$

2) On se place désormais dans le cas où $\beta > 1$.

a) Soit $X > 0$, et n la partie entière de X/π. Alors, la relation de Chasles s'écrit

$$\int_0^X \frac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x\right) + \int_{n\pi}^{X} \frac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

La fonction $f(x) = \frac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x}$ étant positive sur $\mathbb{R}_+$, la positivité de l'intégrale donne l'encadrement

$$0 \leqslant \int_{n\pi}^{X} \frac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x \leqslant I_{n,\beta}$$

Donc finalement

$$\sum_{k=0}^{n-1} I_{k,\beta} \leqslant \int_0^X \frac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n} I_{k,\beta}$$

Donc, si la série converge, alors l'intégrale converge (par encadrement, les deux cotés ayant la même limite). La première inégalité suffit à prouver que, si la série diverge, comme elle est à termes positifs, alors l'intégrale diverge aussi [1].

En conclusion, $\boxed{\text{La série } \sum_k I_{k,\beta} \text{ et l'intégrale } I_\beta \text{ sont de même nature.}}$

1. On peut aussi prouver directement que, si l'intégrale converge, alors, en prenant $X = n\pi$, la série converge. C'est le sens « facile ».

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. La fonction $x \mapsto x^\beta$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc, pour tout $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$,

$$\begin{array}{rcccc} 0 < (k\pi)^\beta & \leqslant & x^\beta & \leqslant & ((k+1)\pi)^\beta \\ \Longrightarrow 0 < 1 + (k\pi)^\beta \cos^2 x & \leqslant & 1 + x^\beta \cos^2 x & \leqslant & 1 + ((k+1)\pi)^\beta \cos^2 x \\ \Longrightarrow \dfrac{1}{1 + ((k+1)\pi)^\beta \cos^2 x} & \leqslant & 1 + x^\beta \cos^2 x & \leqslant & \dfrac{1}{1 + (k\pi)^\beta \cos^2 x} \end{array}$$

Et finalement en intégrant cet encadrement sur $[k\pi, (k+1)\pi]$,

$$\boxed{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1 + (k+1)^\beta \pi^\beta \cos^2 x} \, \mathrm{d}x \leqslant I_{k,\beta} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1 + k^\beta \pi^\beta \cos^2 x} \, \mathrm{d}x}$$

c) Effectuons le changement de variable $\varphi : x \mapsto \tan x$. La fonction φ est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective de $[0, \pi/2[$ dans $[0, +\infty[$. De plus $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ et $\cos^2 x = \dfrac{1}{\tan'(x)} = \dfrac{1}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + C^2 \cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2 + C^2} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{1+C^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{1+C^2}}\right)^2} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{1+C^2} \left[\sqrt{1+C^2} \operatorname{Arctan} \left(\frac{t}{\sqrt{1+C^2}} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+C^2}} \end{aligned}$$

d) D'après 1, l'intégrale I_β et la série $\sum_k I_{k,\beta}$ sont de même nature, nous allons donc étudier la série.

La formule trouvée à la question 3 permet de calculer les intégrales trouvée à la question 2. L'encadrement devient

$$\frac{\pi}{2\sqrt{1 + ((k+1)^\beta \pi^\beta)^2}} \leqslant I_{k,\beta} \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{1 + (k^\beta \pi^\beta)^2}}$$

Les deux cotés de l'encadrement sont équivalent à $\dfrac{\pi^{1-\beta}}{2k^\beta}$, par conséquent

$$I_{k,\beta} \sim \frac{\pi^{1-\beta}}{2k^\beta}$$

Ainsi, $\boxed{\text{L'intégrale } I_\beta \text{ converge pour tout } \beta > 1}$

FIN DE L'ÉPREUVE