Épreuve de Mathématiques 2

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On considère l'application ψ définie pour tout réel x par

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\text{ch } t}\,\mathrm{d}t$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que l'intégrale $\psi(x)$ ci-dessus converge.

2) **a)** Montrer que, pour tout réel X et tout entier naturel strictement positif N

$$\frac{1}{1+X} = \left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k X^k\right) + \frac{(-1)^{N+1}X^{N+1}}{1+X}$$

b) En déduire que, pour tout réel t et tout entier naturel strictement positif N

$$\frac{1}{\text{ch } t} = 2e^{-t}\left[\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k e^{-2kt}\right) + \frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right]$$

c) Montrer que, pour tout réel x et tout entier naturel strictement positif N

$$\psi(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\left[\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k e^{-2kt}\right) + \frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right]\mathrm{d}t$$

Dans ce qui suit, on notera

$$R_N(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\,\mathrm{d}t$$

3) **a)** Montrer que l'intégrale $R_N(x)$ converge, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction $h : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{e^{-t}\cos(xt)}{1+e^{-2t}}$ est bornée sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer la limite de $R_N(x)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

4) N désignant un entier naturel non nul, calculer, pour tout entier k de $[0, N]$

$$J_k(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)e^{-2kt}\,\mathrm{d}t$$

5) Montrer que, pour tout réel x, $\psi(x)$ peut s'exprimer comme la somme d'une série

$$\psi(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k(x)$$

et donner, pour tout entier k ; une expression de $u_k(x)$.

Exercice 2

Soient λ et μ deux réels, $\mu \neq 0$, tels que : $\lambda^2 - \mu < 0$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + 2\,\lambda\,x + \mu)^{n+1}}$$

1) Montrer qu'il existe deux réels α et β, que l'on exprimera en fonction de λ et μ, tels que, pour tout réel x : $x^2 + 2\,\lambda\,x + \mu = \alpha\left(1 + \beta^2\,(x+\lambda)^2\right)$.

2) Pour tout entier naturel n, étudier la convergence de I_n. Que vaut I_0 ?

3) On se place, dans ce qui suit, dans le cas $\lambda = 0$, $\mu = 1$.

- **a)** Montrer que, pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \dfrac{(2n-1)\,I_{n-1}}{2n}$.
(On pourra intégrer par parties.)
- **b)** Pour tout entier naturel n, exprimer I_n en fonction de n (on donnera la réponse à l'aide de factorielles).

Exercice 3

Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que, pour tout x réel, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. En déduire le domaine de définition de f.

2) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que sa dérivée f' vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = -1 + 2xf(x)$$

3)
- **a)** Établir pour tout réel $x > 0$ l'inégalité : $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2x}e^{-x^2} \leqslant 0$.
- **b)** En déduire que, pour tout $x \geqslant 0$, $2xf(x) \leqslant 1$.
- **c)** En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tends vers $+\infty$.
- **d)** Étudier le signe de f' sur $\mathbb{R}_+$.

4) On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

- **a)** Montrer la convergence et déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
- **b)** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- **c)** Donner, pour tout réel x, l'expression de $f(x) + f(-x)$ en fonction de x à l'aide d'un changement de variable.
- **d)** En déduire le signe de f' sur $\mathbb{R}_-$.

5)
- **a)** À l'aide d'intégrations par parties, établir la relation

$$\forall x > 0 \qquad f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + \frac{3e^{x^2}}{4} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^4}\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire que $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{2x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6) **a)** Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Établir pour tout entier naturel n l'existence de deux fonctions polynômes P_n et Q_n telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x) + Q_n(x)$$

c) Déterminer, pour $n \geqslant 1$, les termes de plus haut degré respectifs de P_n et Q_n.

7) **a)** Établir, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n+1)}(x) = 2xf^{(n)}(x) + 2nf^{(n-1)}(x)$$

b) Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction f admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n qui s'écrit $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.

Calculer a_0. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, a_{2k+1} en fonction de a_{2k-1}, puis a_{2k+2} en fonction de a_{2k}.

c) Calculer a_{2k+1} et a_{2k} en fonction de k.

Exercice 4

Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$\begin{aligned} I_\beta &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\ \forall k \in \mathbb{N}, \qquad I_{k,\beta} &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+x^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

1) Montrer que, pour $\beta \in]0,1]$, l'intégrale I_β diverge.

2) On se place désormais dans le cas où $\beta > 1$.
Comparer la convergence de la série $\displaystyle\sum_k I_{k,\beta}$ et de l'intégrale I_β.

3) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+(k+1)^\beta \pi^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x \leqslant I_{k,\beta} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{1}{1+k^\beta \pi^\beta \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

4) Soit $C \in \mathbb{R}^*$. On pose $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+C^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. Calculer J à l'aide du changement de variable $t = \tan x$.

5) Pour quelles valeurs de β l'intégrale I_β est-elle convergente ?

FIN DE L'ÉPREUVE