Lycée La Prat's
Classe de PT

Vendredi 2 octobre 2015

Épreuve de Mathématiques 2

Correction

Exercice 1 (PT 2015 C)

$$f_n(x) = e^{\frac{x^2}{n}} - \frac{x^2}{n} - 1 \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}} + \frac{x^2}{n} - 1$$

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(-x) = e^{\frac{(-x)^2}{n}} - \dfrac{(-x)^2}{n} - 1 = f_n(x)$ donc f_n est paire. De même pour g_n.

Donc $\boxed{\text{On peut réduire le domaine d'étude de } f_n \text{ et } g_n \text{ à } \mathbb{R}_+}$

2) **a)** Pour $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{f_1(x) - g_1(x)} = e^{x^2} - x^2 - 1 - e^{-x^2} - x^2 + 1 \boxed{= 2\,\mathrm{sh}\,(x^2) - 2x^2}$$

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}\,(t) \geqslant 1$, donc en intégrant entre 0 et $t \geqslant 0$, par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{\mathrm{sh}\,(t) \geqslant t}$$

Toujours penser à la méthode universelle : étudier la fonction. On pose $h(t) = \mathrm{sh}\,(t) - t$ et on dérive suffisamment, comme dans l'exercice 13

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Comme $x^2 \geqslant 0$, $2(\mathrm{sh}\,(x^2) - x^2) \geqslant 0$ d'après ci-dessus, ainsi d'après a)

$$\boxed{f_1(x) \geqslant g_1(x)}$$

c) f_1 et g_1 sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ car composées de fonctions $\mathscr{C}^\infty$, et

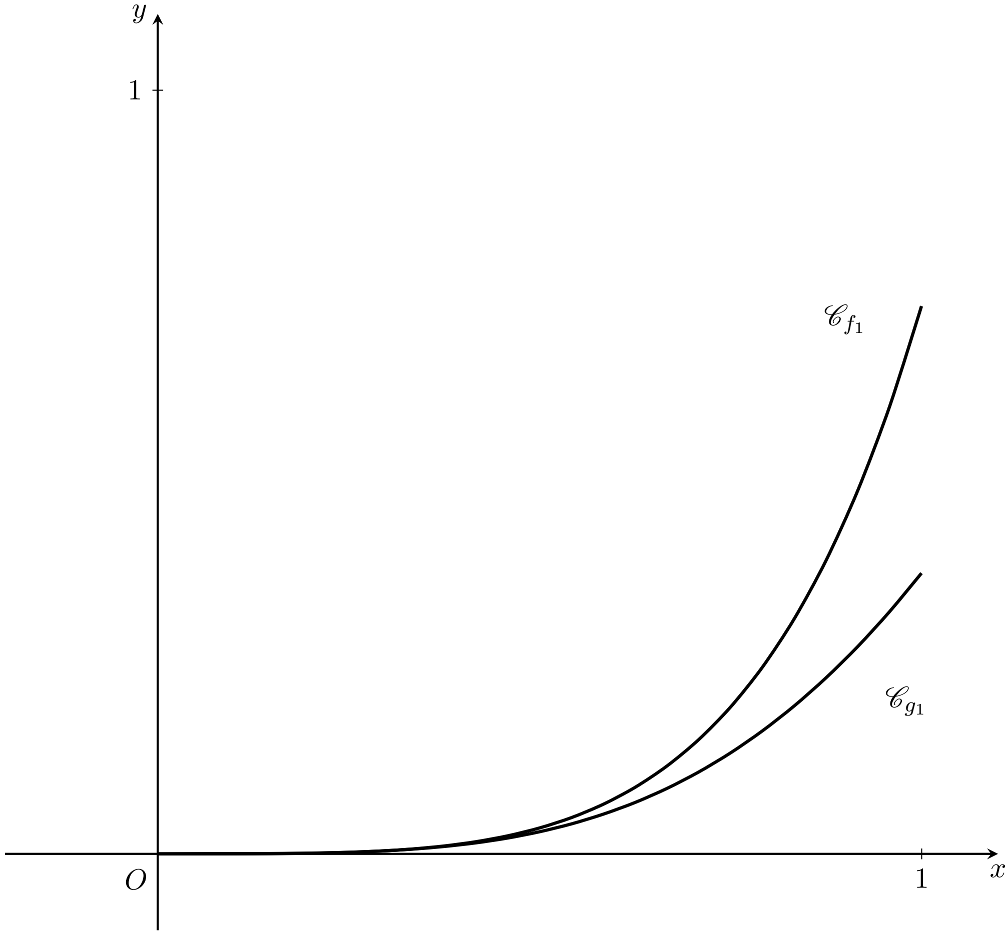
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f_1'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x\left(e^{x^2} - 1\right) \qquad \text{et} \qquad g_1'(x) = -2xe^{-x^2} + 2x = 2x\left(1 - e^{-x^2}\right)$$

Or $\forall u \geqslant 0$, $e^u \geqslant 1$ et $e^{-u} \leqslant 1$, d'où $f_1'(x) \geqslant 0$ et $g_1'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

x	0		1
$f_1'(x)$	0	$+$	
f_1	0	$\nearrow$	$e-2$

x	0		1
$g_1'(x)$	0	$+$	
g_1	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$

$e \simeq 2{,}7 < 3$ donc $e - 2 \simeq 0{,}7 < 1$ et $1/e > 1/3$.



3) **a)** f_n et g_n sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car composées de fonctions $\mathscr{C}^\infty$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = \frac{2x}{n}e^{\frac{x^2}{n}} - \frac{2x}{n} = \boxed{\frac{2x}{n}x\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right)} \quad \text{et} \quad g_n'(x) = -\frac{2x}{n}e^{-\frac{x^2}{n}} + \frac{2x}{n} = \boxed{\frac{2x}{n}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{n}}\right)}$$

b) De meme qu'au 2)c),

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$
f_n	$0 \nearrow$	

x	0	$+\infty$
$g_n'(x)$	0	$+$
g_n	$0 \nearrow$	

c) f_n et g_n sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$ d'après ci-dessus et $f_n(0) = g_n(0) = 0$ donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad g_n(x) \geqslant 0}$$

d) Soit $x \in [0, \sqrt{n}]$.

- D'après c), $f_n(x) = e^{\frac{x^2}{n}} - \frac{x^2}{n} - 1 \geqslant 0$ donc $\qquad e^{\frac{x^2}{n}} \geqslant \frac{x^2}{n} + 1$

  Or $\frac{x^2}{n} + 1 \geqslant 0$ donc, en élevant à la puissance n, $\qquad e^{x^2} \geqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n$

  Et en passant à l'inverse (tout est > 0) $\qquad e^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$

- De même, d'après c), $g_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}} + \frac{x^2}{n} - 1 \geqslant 0$ donc $\qquad e^{-\frac{x^2}{n}} \geqslant 1 - \frac{x^2}{n}$

  Or $1 - \frac{x^2}{n} \geqslant 0$ car $|x| \leqslant \sqrt{n}$, donc, en élevant à la puissance n, $\qquad \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2}$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in [0, \sqrt{n}] \quad \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}}$$

L'inégalité de droite a été prouvée sur $\mathbb{R}_+$.

e) Soit x fixé dans $\mathbb{R}_+$. Pour n assez grand, on a $x \in [0, \sqrt{n}[$, d'où $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) > 0$, ce qui permet d'écrire $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right)$. Puis :

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(-\frac{x^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-x^2 + o(1))$$

donc $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{-x^2}$.

Par ailleurs, $\left(1 + \frac{x^2}{n}\right) > 0$ pour tout x et pour tout n, d'où :

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)\right) = \exp\left(-n\left(\frac{x^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-x^2 + o(1))$$

donc $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} = e^{-x^2}$.

Conclusion

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} = e^{-x^2}}$$

4) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. *Comment commencer ? D'abord, les fractions, c'est le Mal : partir du résultat et essayer d'obtenir une expression sans fraction. Suivre l'inspiration du moment (il y a plusieurs méthodes, ici), et retourner le calcul dans le bon sens : conclusion en dernier.*

La formule du binôme s'écrit :

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x^2}{n}\right)^k$$

Or tous les termes de la somme sont positifs, et en ne gardant que les deux premiers on trouve

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n \geqslant \binom{n}{0}\left(\frac{x^2}{n}\right)^0 + \binom{n}{1}\left(\frac{x^2}{n}\right)^1 = 1 + x^2$$

Ici tout est > 0, donc, en passant à l'inverse,

$$\boxed{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1 + x^2}}$$

b) *On peut raisonner soit par équivalent : $\frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ donc..., soit directement.*

$$\forall X \in \mathbb{R}_+ \quad \int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = [\mathrm{Arctan}\,(x)]_0^X = \mathrm{Arctan}\ X \xrightarrow[X \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{2}}$

c) D'après 3)d) et 4)a), pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (remarque du 3)d)),

$$e^{-x^2} \leqslant \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

De plus $e^{-x^2} \geqslant 0$, et d'après 4)b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ converge.

Donc, d'après le théorème de majoration des fonctions positives, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$

En intégrant la majoration ci-dessus entre 0 et $+\infty$, par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 2 (Agro 2009, concours A, problème II – corrigé UPS)

La quantité $S_n(f)$ est la n-ème somme de Riemann de la fonction f sur $[0;1]$. La fonction f étant continue sur ce segment, un théorème du cours dit que

$$\boxed{\text{La suite } (S_n(f)) \text{ converge vers } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

1) Application

a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k/n)+1} = S_n(h) \qquad \text{où} \qquad \forall x \in [0;1]\,,\ h(x) = \frac{1}{1+x},$$

donc, d'après le résultat sur les sommes de Riemann rappelé à la question 0, on peut affirmer que (u_n) converge et

$$\lim u_n = \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \big[\ln|1+x|\big]_0^1 = \ln 2 - 0.$$

En conclusion,

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ln 2.}$$

b) Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
v_n + \frac{1}{2}u_n &= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} \\
&= \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{1}{2k'+1+2n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+2n} \qquad \text{en posant } k = k'+n \text{ dans la première somme} \\
&= \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ impair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} = \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} = u_{2n},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n + \frac{1}{2}u_n = u_{2n}.}$$

c) La relation de la question précédente nous dit que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = u_{2n} - \dfrac{1}{2}u_n$.

Or la suite (u_{2n}) étant extraite de (u_n), elle converge vers la même limite que (u_n), c'est-à-dire $\ln 2$. Donc (v_n) converge (comme combinaison linéaire de suites convergentes) et l'on a

$$\lim v_n = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

En conclusion,

$$\boxed{(v_n) \text{ converge bien vers } \frac{1}{2}\ln 2.}$$

2) Développement asymptotique d'une somme de Riemann

a) La fonction f étant $\mathcal{C}^\infty$, sa dérivée troisième $f^{(3)}$ est a fortiori continue sur le segment $[0;1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Par conséquent,

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [0;1]\,, \qquad |f^{(3)}(x)| \leqslant M.}$$

b) i) Comme nous le suggère l'énoncé, appliquons la formule de Taylor reste intégral à la fonction f sur l'intervalle $[k/n;t]$ où elle est de classe $\mathcal{C}^3$, ce qui donne

$$f(t) = f\Big(\frac{k}{n}\Big) + \Big(t-\frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big) + \int_{\frac{k}{n}}^t \frac{(t-u)^2}{2!} f'''(u)\,\mathrm{d}u$$

Par suite, on a

$$\Big|f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t-\frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| = \Big|\int_{\frac{k}{n}}^t \frac{(t-u)^2}{2!} f'''(u)\,\mathrm{d}u\Big|$$

Puis, comme, pour tout $u \in [k/n, t] \subset [0;1]$, $(t-u)^2 \geqslant 0$ et $|f^{(3)}(u)| \leqslant M$ d'après le résultat de la question précédente,

$$\Big|\int_{\frac{k}{n}}^t \frac{(t-u)^2}{2!} f'''(u)\,\mathrm{d}u\Big| \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^t \frac{(t-u)^2}{2!}|f'''(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^t \frac{(t-u)^2}{2!} M\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^3 M$$

En conclusion,

$$\boxed{\Big|f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t-\frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \leqslant \frac{M}{6}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^3.}$$

ii) On voit immédiatement que

$$\boxed{\text{La primitive sur } \mathbb{R} \text{ de } t \mapsto \Big(t-\frac{k}{n}\Big)^q \text{ qui s'annule en } \frac{k}{n} \text{ est } t \mapsto \frac{1}{q+1}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^{q+1}.}$$

iii) On a

$$\begin{aligned}
&\int_{k/n}^{(k+1)/n} \Big[f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t-\frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big]\ \mathrm{d}t \\
= &\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\int_{k/n}^{(k+1)/n} 1\ \mathrm{d}t - f'\Big(\frac{k}{n}\Big)\int_{k/n}^{(k+1)/n}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)\ \mathrm{d}t \\
&\qquad -\frac{1}{2}f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\int_{k/n}^{(k+1)/n}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2\ \mathrm{d}t \\
= &\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - f\Big(\frac{k}{n}\Big)[t]_{k/n}^{(k+1)/n} - f'\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big[\frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2\Big]_{k/n}^{(k+1)/n} \\
&\qquad -\frac{1}{2}f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big[\frac{1}{3}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^3\Big]_{k/n}^{(k+1)/n} \\
= &\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\frac{1}{n} - f'\Big(\frac{k}{n}\Big)\frac{1}{2n^2} - f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\frac{1}{6n^3},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2n^2}f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{6n^3}f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \\
= &\Big|\int_{k/n}^{(k+1)/n} \Big[f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t-\frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big]\ \mathrm{d}t\Big| \\
\leqslant &\int_{k/n}^{(k+1)/n} \Big|f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t-\frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big|\ \mathrm{d}t \\
\leqslant &\int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{M}{6}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^3\ \mathrm{d}t \qquad \text{d'après } \alpha]
\end{aligned}$$

Or
$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{M}{6}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^3 \ \mathrm{d}t = \frac{M}{6}\Big[\frac{1}{4}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^4\Big]_{k/n}^{(k+1)/n} = \frac{M}{24n^4},$$
donc
$$\boxed{\Big|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2n^2}f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{6n^3}f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \leqslant \frac{M}{24n^4}\cdot}$$

c) On a
$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - S_n(f) - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'')\Big| \\
= &\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \\
= &\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2n^2}f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{6n^3}f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)\Big| \\
\leqslant &\sum_{k=0}^{n-1}\Big|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2n^2}f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{6n^3}f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \\
\leqslant &\sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{24n^4} \qquad \text{d'après b).}
\end{aligned}$$

Or
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{24n^4} = n\times\frac{M}{24n^4} = \frac{M}{24n^3},$$
donc
$$\boxed{\Big|\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - S_n(f) - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'')\Big| \leqslant \frac{M}{24n^3}\cdot}$$

d) Le résultat de la question précédente nous dit que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a
$$|\varepsilon_n| = n^2\Big|S_n(f) + \frac{1}{2n}S_n(f') + \frac{1}{6n^2}S_n(f'') - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\Big| \leqslant n^2\frac{M}{24n^3} = \frac{M}{24n}\cdot$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} M/(24n) = 0$, par encadrement, il vient
$$\boxed{(\varepsilon_n) \text{ converge vers } 0.}$$
On en déduit immédiatement que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2},$$
et donc
$$\boxed{S_n(f) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot}$$

e) Si l'on applique le résultat de la question précédente à la fonction f' (ce qui est licite puisque f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^3$), on obtient
$$S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f'') - \frac{1}{6n^2}S_n(f''') + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot$$
Or la suite $(S_n(f'''))$ est bornée puisqu'elle converge d'après le résultat rappelé à la question 0, donc
$$\frac{1}{6n^2}S_n(f''') = o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

ce qui donne

$$\boxed{S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n} S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\cdot}$$

La fonction f'' étant continue, le théorème sur les sommes de Riemann (celui que l'on a utilisé à la question 0) dit que

$$S_n(f'') \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f''(t)\ \mathrm{d}t,$$

ce que l'on peut écrire

$$\boxed{S_n(f'') = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o(1).}$$

f) En combinant les trois derniers résultats encadrés, on obtient

$$\begin{aligned}
S_n(f) &= \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\Big(\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n} S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) - \frac{1}{6n^2} S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2} S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\Big(\int_0^1 f''(t)\ \mathrm{d}t + o(1)\Big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\d{t} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{S_n(f) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\ \mathrm{d}t + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot}$$

3) a) Nous avons déjà signalé que

$$u_n = S_n(h) \qquad \text{où} \qquad \forall x \in [0;1]\,,\ h(x) = \frac{1}{1+x}\cdot$$

En appliquant le résultat de la question précédente à la fonction h, on obtient

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^1 h(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 h'(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 h''(t)\ \mathrm{d}t + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \frac{1}{2n}\big[h(t)\big]_0^1 + \frac{1}{12n^2}\big[h'(t)\big]_0^1 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= \big[\ln|1+t|\big]_0^1 - \frac{1}{2n}\Big[\frac{1}{1+t}\Big]_0^1 + \frac{1}{12n^2}\Big[-\frac{1}{(1+t)^2}\Big]_0^1 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{u_n = \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot}$$

b) On en déduit immédiatement que

$$u_n - \ln 2 = \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

donc

$$\boxed{u_n - \ln 2 \sim \frac{1}{4n}\cdot}$$

c) Pour tout $n \geqslant 1$, les résultats des questions 1. c) et 3. b) donnent

$$\begin{aligned} v_n &= u_{2n} - \frac{1}{2} u_n = \ln 2 + \frac{1}{8n} + \frac{1}{64n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{64n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \end{aligned}$$

donc

$$v_n - \frac{1}{2} \ln 2 = -\frac{1}{64n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

ce qui donne

$$\boxed{v_n - \frac{1}{2} \ln 2 \sim -\frac{1}{64n^2}.}$$

FIN DE L'ÉPREUVE