 

# Épreuve de Mathématiques 2

Durée 4 h

---

**L'usage des calculatrices est interdit.**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

## Exercice 1

Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère les fonctions $f_n$ et $g_n$ définies, pour tout réel $x$, par :

$$f_n(x) = e^{\frac{x^2}{n}} - \frac{x^2}{n} - 1 \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}} + \frac{x^2}{n} - 1$$

**1)** Étudier la parité de $f_n$ et $g_n$. En déduire un domaine d'étude de ces fonctions.

**2)** On souhaite ici tracer les courbes représentatives des fonctions $f_1$ et $g_1$ sur un même graphe.

- **a)** Pour $x \in \mathbb{R}$ exprimer $f_1(x) - g_1(x)$ à l'aide de la fonction sinus hyperbolique.
- **b)** Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$,
$$\operatorname{sh}(t) \geqslant t$$
En déduire que $f_1(x) \geqslant g_1(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.
- **c)** À l'aide de ces éléments, et en faisant rapidement deux tableaux de variations, représenter sur un même graphe les courbes représentatives respectives des fonctions $f_1$ et $g_1$ sur $[0, 1]$ dans un repère orthonormé direct. On prendra comme unité 10 cm.

**3)** On suppose $n \geqslant 2$.

- **a)** Calculer, pour tout réel $x$, $f_n'(x)$ et $g_n'(x)$.
- **b)** Étudier les variations de $f_n$ et $g_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
- **c)** Montrer que, pour tout réel positif $x$, $f_n(x) \geqslant 0$ et $g_n(x) \geqslant 0$.
- **d)** Montrer que, pour tout réel positif $x$ de l'intervalle $[0, \sqrt{n}]$,
$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$
L'inégalité de droite est-elle encore vraie sur $\mathbb{R}_+$ ?
- **e)** Dans cette question, on suppose $x$ fixé dans $\mathbb{R}_+$. Déterminer :
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

**4)** **a)** Montrer que pour tout réel positif $x$ :

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1 + x^2}$$

**b)** Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ et calculer sa valeur.

**c)** En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ ainsi que la majoration

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

# Exercice 2

Pour toute fonction $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$.

Quelle est la limite de la suite $(S_n(f))$ ? (*Aucune démonstration n'est attendue.*)

**1) Application**

Considérons la suite $(u_n)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$

et la suite $(v_n)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$

**a)** Démontrer que la suite $(u_n)$ est convergente et préciser sa limite.

**b)** Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n + \dfrac{1}{2}u_n = u_{2n}$.

**c)** Démontrer alors que la suite $(v_n)$ converge vers $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

**2) Développement asymptotique d'une somme de Riemann**

Dans cette partie, $f$ désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur le segment $[0;1]$, à valeurs réelles.

**a)** Justifier l'existence d'un nombre réel $M$ tel que $\forall x \in [0;1]\,,\ |f^{(3)}(x)| \leqslant M$.

**b)** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0; n-1]\!]$ et $t \in \Big[\dfrac{k}{n}; \dfrac{k+1}{n}\Big]$.

**i)** À l'aide de la formule de Taylor reste intégral appliquée à la fonction $f$ de classe $\mathscr{C}^3$ sur l'intervalle $[k/n; t]$, démontrer que

$$\Big|f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t-\frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \leqslant \frac{M}{6}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^3.$$

**ii)** Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \longmapsto \Big(t-\dfrac{k}{n}\Big)^q$ qui s'annule en $\dfrac{k}{n}$ ?

**iii)** Par intégration entre $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$, démontrer que

$$\Big|\Big(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t\Big) - \frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2n^2}f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{6n^3}f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \leqslant \frac{M}{24n^4}.$$

**c)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En additionnant les inégalités obtenues à la question 2) b) iii, démontrer que

$$\Big|\Big(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\Big) - S_n(f) - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'')\Big| \leqslant \frac{M}{24n^3}.$$

**d)** Définissons la suite $(\varepsilon_n)$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \varepsilon_n = n^2\Big(S_n(f) + \frac{1}{2n}S_n(f') + \frac{1}{6n^2}S_n(f'') - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

Démontrer que la suite $(\varepsilon_n)$ converge vers 0 et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2}.$$

**e)** Justifier l'existence de deux suites $(\varepsilon'_n)$ et $(\varepsilon''_n)$ de limite nulle telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n} S_n(f'') + \frac{\varepsilon'_n}{n}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(f'') = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon''_n.$$

**f)** En déduire l'existence d'une suite $(\delta_n)$ de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\delta_n}{n^2}.$$

*Nous venons ainsi de démontrer que*

$$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

**3) Application**

Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ont été définies à la question 1.

**a)** Démontrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)$ de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + \frac{\alpha_n}{n^2}.$$

**b)** En déduire un équivalent simple de $u_n - \ln 2$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**c)** Démontrer que $v_n - \frac{1}{2}\ln 2 \sim -\frac{1}{64n^2}$

**FIN DE L'ÉPREUVE**