Épreuve de Mathématiques 1

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Partie 1

Dans cette partie, on pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n(t) = e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

1) **a)** Montrer que R_n est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(t) - y(t) = \frac{t^n}{n!} \qquad (\mathcal{E})$$

b) Donner la solution générale de l'équation sans second membre $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$.

c) Résoudre $(\mathcal{E})$ (on exprimera les solutions à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer).

d) En déduire une expression de $R_n(t)$ pour tout réel t et tout entier naturel n à l'aide d'une intégrale.

e) Montrer que, pour tout réel positif t :

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{t^{n+1}e^t}{(n+1)!}$$

f) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$. Ce résultat doit être justifié à l'aide des questions qui précèdent.

2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$$

a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont strictement monotones, et donner leur sens de variation.

b) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent, et déterminer leur limite.

c) En déduire que, pour tout entier naturel q non nul,

$$u_q < e < v_q$$

d) On cherche à montrer que e est irrationnel. À cet effet, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q, premiers entre eux, tels que $e = \dfrac{p}{q}$.

En multipliant la double inégalité précédente par $q!$, montrer que c'est impossible, et conclure sur l'irrationalité de e.

e) On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad w_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}$$

i) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$|u_n - e| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

ii) Montrer qu'il existe un rang, n_1 tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$:

$$|w_n - e| \leqslant \varepsilon$$

iii) Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

3) On considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N},\ n>1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > 1 : e_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie 2

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1]$, $g(x) = x \ln x$.

1) Étudier la continuité, la dérivabilité et les variations de la fonction g sur $[0,1]$, puis tracer sa courbe représentative.

2) En déduire que $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$ existe et donner sa valeur.

3) On définit la suite $(t_n)_n$ par $t_0 \in \left]\dfrac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{n+1} = -g(t_n)$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}$$

4) Montrer que, pour tout réel $x \in [t_0, e^{-1}]$:

$$0 \leqslant -g'(x) \leqslant \frac{1}{t_0}(e^{-1} - x)$$

Puis que

$$|g(x) - g(e^{-1})| \leqslant \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

5) En déduire que, pour tout entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|t_n - e^{-1}| \leqslant 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}$$

6) Quelle est la limite de la suite $(t_n)_n$?

7) On pose :

$$I = \int_0^1 x^{-x}\, \mathrm{d}x$$

On admet le résultat suivant : *Soit* $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue.*
Si f *est prolongeable par continuité en* $x = a$*, alors l'intégrale*

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$$

existe. On dit que l'intégrale est « convergente ».

a) Montrer que I est une intégrale convergente.

b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$I = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k \ln^k x\, \mathrm{d}x + \int_0^1 \widetilde{R}_n(x)\, \mathrm{d}x$$

où on exprimera $\widetilde{R}_n$, à l'aide de la fonction R_n introduite en partie I.

c) Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\left| \int_0^1 \widetilde{R}_n(x)\, \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{e^{1/e}}{e^{n+1}}$$

d) Pour tout couple d'entiers naturels (p, q), $p > 0$, on pose :

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln^q x\, \mathrm{d}x$$

i) Montrer que $I_{p,q}$ est une intégrale convergente.

ii) Montrer que, pour tout couple d'entiers $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$$

iii) Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

e) Montrer que

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

Partie 3

1) Rappeler le résultat permettant l'approximation de l'intégrale d'une fonction φ continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ par les sommes de Riemann.

2) Déterminer :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

3) Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$ de $\left(\dfrac{4^n n^n n!}{(2n)!}\right)^{1/n}$

FIN DE L'ÉPREUVE