Épreuve de Mathématiques 1

Correction

Exercice 1 (PT 2007, A)

1)
- $T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$
- $T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X$
- $T_4 = 2XT_3 - T_2 = 2X(4X^3 - 3X) - 2X^2 + 1 = 8X^4 - 8X^2 + 1$

2) Récurrence double : montrons que

$$\mathcal{H}_n : \deg T_n = n \text{ et son coefficient dominant est } a_n^{[n]} = 2^{n-1}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$ est vraie puisque $T_1 = X$ de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^0$.
- $\underline{\mathcal{H}_2}$ est vraie puisque $T_2 = 2X^2 - 1$ de degré 2 et de coefficient dominant $2 = 2^1$.
- $\underline{\mathcal{H}_{n-1}\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ **et** $\mathcal{H}_{n-1}$ vraies. Alors

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

  Or $\deg(XT_n) = n + 1$ et $\deg(T_{n-1}) = n - 1$ d'après $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n-1}$.
  Ainsi $\deg(T_{n+1}) = n + 1$, et le coefficient dominant vient de $2XT_n$ uniquement. Il vaut le double de celui de T_n, donc $a_{n+1}^{[n+1]} = 2a_n^{[n]} = 2^n$. Par conséquent, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1, \deg T_n = n \text{ et son coefficient dominant est } a_n^{[n]} = 2^{n-1}.}$

On a besoin des rangs n et $n-1$, donc il faut initialiser avec $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$. On peut aussi mettre les rangs n et $n-1$ dans $\mathcal{H}_n$, en commençant donc à $n = 2$.

3) Le produit de deux polynômes impairs est pair, et le produit d'un polynôme pair et d'un polynôme impair est impair.
Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad T_{2n} \text{ est pair et } T_{2n+1} \text{ est impair}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie car $T_0 = 1$ est paire et $T_1 = X$ est impair.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.
  Le polynôme $2XT_{2n+1}$ est pair comme produit de deux polynômes impairs, et T_{2n} est pair. Donc T_{2n+2} est pair comme somme de polynômes pairs.
  Le polynôme $2XT_{2n+2}$ est impair comme produit d'un polynôme impair et d'un polynôme pair, et T_{2n+1} est impair. Donc T_{2n+3} est impair comme somme de polynômes impairs.
  Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad T_n \text{ a la parité de } n.}$

4) $\star$ $\underline{T_n(1)}$: La suite $(T_n(1))$ vérifie la relation de récurrence $T_{n+1}(1) = 2T_n(1) - T_{n-1}(1)$ avec pour premier termes $T_0(1) = T_1(1) = 1$. On peut donc résoudre à l'aide des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Sinon, la récurrence (double) est rapide :

$$\mathcal{H}_n : \quad T_n(1) = 1$$

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ et $\underline{\mathcal{H}_1}$ sont vraies par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_{n-1}, \mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_{n-1}$ et $\mathcal{H}_n$ vraies. Alors $T_{n+1}(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$, donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad T_n(1) = 1}$

$\star$ $\underline{T_n(-1)}$: Par parité, $T_{2n}(-1) = T_{2n}(1) = 1$ et $T_{2n+1}(-1) = -T_{2n}(1) = -1$. Donc $\boxed{T_n(-1) = (-1)^n.}$

$\star$ $\underline{T_n(0)}$: Par parité, $\boxed{T_{2n+1}(0) = 0.}$

Soit $u_n = T_{2n}(0)$. Alors $u_0 = T_0(0) = 1$ et

$$u_{n+1} = T_{2n+2}(0) = 2 \times 0 \times T_{2n+1}(0) - T_{2n}(0) = -u_n$$

Ainsi (u_n) est une suite récurrente de raison -1 :

Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad T_{2n}(0) = (-1)^n}$

5) On note $(\mathscr{P})$ la propriété suivante pour une suite (P_n) de polynômes

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \qquad P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

$\star$ Unicité : Soit (P_n) et (Q_n) deux suites de polynômes vérifiant $(\mathscr{P})$. Soit $n \in \mathbb{N}$, il vient

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) = Q_n(\cos\theta) \Longrightarrow \forall x \in [-1, 1] \quad P_n(x) - Q_n(x) = 0$$

Ainsi $P_n - Q_n$ a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul : $P_n - Q_n = 0$. D'où l'unicité.

$\star$ $\underline{(T_n) \text{ vérifie la propriété}}$. Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \qquad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie car $\cos(0) = 1$.
- $\underline{\mathcal{H}_1}$ est vraie car $T_1 = X$.
- $\underline{\mathcal{H}_{n-1}, \mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_{n-1}$ et $\mathcal{H}_n$ vraie. $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) = \cos((n+1)\theta)$$

- Conclusion : $\forall n \geqslant 0 \qquad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$

En conclusion, $\boxed{T_n \text{ est le seul polynôme qui vérifie } (\mathscr{P})}$:

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

6) Dans cette question uniquement, on suppose $n \neq 0$.

a) Il suffit de résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$:

$$T_n(\cos\theta) = 0 \Longleftrightarrow \cos(n\theta) = 0 \Longleftrightarrow n\theta = \frac{\pi}{2}[\pi] \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right]$$

Donc pour $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.}$

b) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, d'après la question précédente, $T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)\right)=0$, c'est-à-dire $x_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)$ est racine de T_n.

De plus, $\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n} \in]0,\pi]$ pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$, et le cosinus est bijectif de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
Ainsi, les réels $(x_0,\dots,x_{n-1})$ sont tous distincts et dans $[-1,1]$.
Or le polynôme T_n est de degré n, il a donc au plus n racines. Ainsi

$$T_n(X) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n}\left(X-\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$

7) Si $n=0$, $T_0'=1$; et si $n=1$, $T_1'=1$. Supposons désormais $n \geqslant 2$.
La relation de la question 5) est vraie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et les fonctions sont dérivables : dérivons-la.

$$-\sin\theta T_n'(\cos\theta) = -n\sin(n\theta)$$

Or $\sin(n\theta)=0$ si et seulement si $\theta = \frac{k\pi}{n}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. De même qu'en 6)b), les $x_k' = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ sont $n-1$ réels tous distincts de $[-1,1]$ lorsque $k \in \{1,\dots,n-1\}$.
De plus, $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \neq 0$ si $k \in \{1,\dots,n-1\}$, donc

$$-\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)T_n'\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = -n\sin(k\pi) = 0 \Longrightarrow T_n'(x_k')=0$$

Ainsi, $(x_1',\dots,x_{n-1}')$ sont des racines de T_n'. Or $\deg T_n' = (\deg T_n)-1 = n-1$, donc ce sont les seules.

Exercice 2 (Centrale-Supélec TSI 2012)

1) **a)** Soit $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} a_kP_k = 0$. En évaluant en $X=-k$, pour $k \in [\![0,n]\!]$ (autant que possible les racines des P_k) l'égalité précédente, on obtient

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_0 & & & & & & & = & 0\\ a_0 & - & a_1 & & & & & = & 0\\ \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots\\ a_0 & - & na_1 & + & \dots & + & (-1)^n a_n & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow a_0=a_1=\dots=a_n=0$$

Donc la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre. De plus il y a $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ vecteurs dans cette famille.
Ainsi, $\boxed{\text{La famille } (P_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$

b) Soit k un entier vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$. $P_k(X+1) = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+j+1) = \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k}(X+j)$ donc

$$\begin{aligned}\Delta(P_k)(X) &= P_k(X+1)-P_k(X) = \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k}(X+j) - \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+j)\\ &= \left(\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}(X+j)\right)(X+k-X) = \frac{1}{(k-1)!}\prod_{j=1}^{k-1}(X+j) = P_{k-1}(X+1)\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\Delta(P_k)(X) = P_{k-1}(X+1)}$ De plus $\boxed{\Delta(P_0) = 1-1 = 0}$

c) Remarquons tout d'abord que $\Delta(P(X+t))(X) = \Delta(P(X))(X+t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ (i.e., les applications linéaires Δ et $P(X) \mapsto P(X+t)$ commutent. Ce qui n'a rien d'évident a priori) ;
Soit k un entier vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_m : \quad \Delta^m(P_k)(X) = P_{k-m}(X+m)$$

est vraie pour tout $m \in [\![0,k]\!]$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie par hypothèse ($\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]}$).
- $\underline{\mathcal{H}_m \Longrightarrow \mathcal{H}_{m+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_m$ vraie, pour un $m \in [\![0, k-1]\!]$ (pour pouvoir considérer $\mathcal{H}_{m+1}$).

$$\Delta^{m+1}(P_k)(X) = \Delta(P_{k-m}(X+m)) = \Delta(P_{k-m})(X+m)$$

Or, comme $k - m \in [\![1, n]\!]$, d'après b) : $\Delta(P_{k-m}) = P_{k-m-1}(X+1)$.
Ainsi, $\Delta^{m+1}(P_k)(X) = P_{k-m-1}(X+m+1)$. Donc $\mathcal{H}_{m+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall m \in [\![0, k]\!] \qquad \Delta^m(P_k)(X) = P_{k-m}(X+m)}$

Cas $m \geqslant k+1$: On peut appliquer le résultat précédent pour k :

$$\Delta^k(P_k)(X) = P_0(X+k) = 1 = P_0$$

Donc $\Delta^{k+1}(P_k)(X) = \Delta(P_0) = 0$ d'après b). Et par linéarité de Δ *(donc $\Delta(0) = 0$)*

$$\boxed{\Delta^m(P_k)(X) = \Delta^{m-(k+1)}(0) = 0}$$

d) D'après 1)a), on sait que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Donc si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k$. Ainsi, d'après 1)c), comme $n \geqslant k+1$ dans la somme,

$$\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Delta^n(P_k) = 0$$

2) a) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \Delta^n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie : $P = P$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1}(P)(X) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \Delta(P(X+k)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k+1) - P(X+k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^{n+1-k} P(X+k) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n+1-k} P(X+k) \\
&= P(X+n+1) + \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) (-1)^{n+1-k} P(X+k) \right] + P(X) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} P(X+k)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad \Delta^n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k)}$

b) Soit $r \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Appliquons les questions 1)d) et 2)a) à $X^r \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\Delta^n(X^r) \overset{1)d)}{=} 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta^n(X^r) \overset{2)a)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (X+k)^r$$

On peut simplifier par $(-1)^n$, et en remarquant que $(-1)^{-k} = (-1)^k$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (X+k)^r = 0$$

Exercice 3

Dans cet exercice, on pose, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \quad , \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad v_n = e^{1-S_{n-1}}$$

1) $u_1 = \dfrac{3}{2}\ln(2) - 1, \qquad u_2 = \dfrac{5}{2}\ln(3/2) - 1, \qquad u_3 = \dfrac{7}{2}\ln(4/3) - 1.$

$S_1 = u_1, \qquad S_2 = \dfrac{5}{2}\ln(3) - \ln(2) - 2, \qquad S_3 = \dfrac{7}{2}\ln(4) - \ln(3\times 2) - 3.$

2) Comme le DL en $u = 0$ de $\ln(1+u)$ s'écrit

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

et que $u = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il vient $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. D'où

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \\
&= \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\
&= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} - 1 \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

(on développe en tronquant tout ce qui dépasse le $\frac{1}{n^2}$, qui est mangé par le $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$)

Conclusion : $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{12n^2}}$

3) La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$) donc, par comparaison, $\boxed{\text{La série } (S_n) \text{ converge}}$

La suite (v_n) converge comme image par une fonction continue ($x \mapsto e^{1-x}$) de la suite (S_n) qui converge.

4) Comme, pour tout $k \geqslant 1$, $\ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$, il vient

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k &= \left(\sum_{k=1}^{n} \left(k + \frac{1}{2}\right)(\ln(k+1) - \ln(k))\right) - n \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \left(k + \frac{1}{2}\right)\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \left(k + \frac{1}{2}\right)\ln(k)\right) - n \\
&= \left(\sum_{k=2}^{n+1} \left(k - \frac{1}{2}\right)\ln(k) - \sum_{k=2}^{n} \left(k + \frac{1}{2}\right)\ln(k)\right) - n \qquad (\text{car } \ln(1) = 0) \\
&= \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n+1) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k)\right) - n \\
&= \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n+1) - \ln(n!)\right) - n
\end{aligned}$$

On peut aussi le montrer par récurrence sur n.

Conclusion : $\boxed{S_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\ln(n+1) - n - \ln(n!)}$

5) Par conséquent, pour $n \geqslant 2$, $v_n = e^{1-S_{n-1}} = e^{1-(n-1/2)\ln(n)+n-1+\ln((n-1)!)} = (n-1)!e^n n^{-(n-1/2)}$

6) Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ (qui existe d'après 3). De plus, comme S_n a une limite finie, v_n a une limite strictement positive (donc non nulle).

Ainsi, $v_{n+1} \sim \ell$. D'où $\dfrac{n!}{n} e^n e n^{-(n+1/2)} \sim \ell$. En posant $K = \ell/e > 0$, il vient

$$\boxed{n! \sim K n^n e^{-n}\sqrt{n}}$$

Exercice 4 (E3A 2007, PC, partiel, et EMLyon 2009)

A. Étude de la fonction f

1) Étude de f en 0.

a) $e^x - 1 = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$ donc

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$$

.

b)
- Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - f(0) = \dfrac{x}{e^x-1} - 1 = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2) = o(1)$.
  Donc f est continue en 0.
- Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - f(0) = \dfrac{x}{e^x-1} - 1 = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2) = -\dfrac{1}{2}x + o(x)$.
  Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
- On ne peut rien déduire de plus : la fonction $x \mapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ admet un DL à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas $\mathscr{C}^1$.

c) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ car composée de fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x - x^2}{(e^x-1)^2} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} = f'(0)$$

Donc f' est continue en 0, et f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

d) Équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 : $y = 1 - \dfrac{1}{2}x$.

D'après la question A.1)a), $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{12}x^2 + o(x^2)$.

Puisque $\dfrac{1}{12}x^2 > 0$ pour tout x dans un voisinage de 0, la courbe est au-dessus de la tangente.

2) Variations de f.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$. Donc g' est du signe de x et il vient

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$+$	

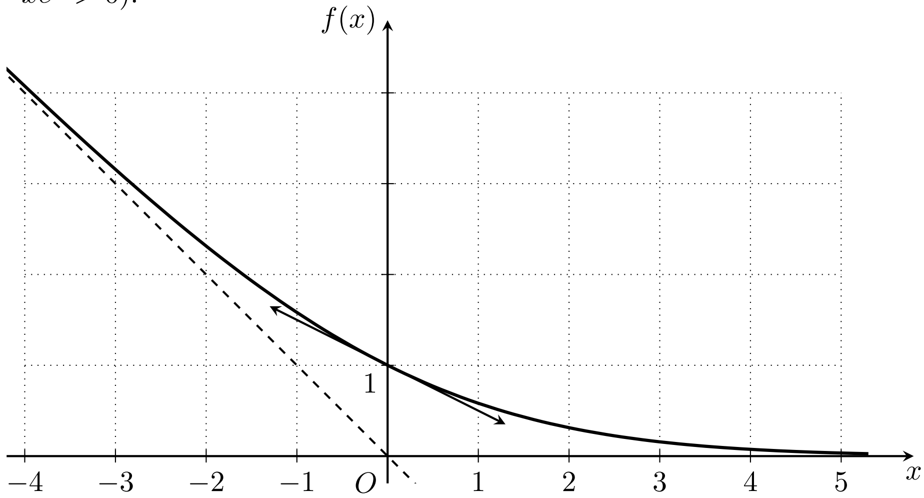
b) D'après le calcul de la question A.1)c), $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$. Donc f' est du signe de $-g$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, d'après A.1)b), $f'(0) < 0$. En conclusion, $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$ et f strictement décroissante.

c) <u>Au voisinage de $+\infty$</u> : $f(x) \sim \dfrac{x}{e^x} \to 0$ et $f > 0$ donc (C) admet une asymptote d'équation $y = 0$ et est au-dessus de celle-ci.
<u>Au voisinage de $-\infty$</u> : $u = e^x \to 0$ lorsque $x \to -\infty$ donc

$$f(x) = -x\left(\frac{1}{1-e^x}\right) = -x - xe^x + o(xe^x)$$

Ainsi $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$, de plus (C) admet une asymptote d'équation $y = -x$ et est au-dessus de celle-ci (car $-xe^x > 0$).

d)



B. Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f.

1) Cherchons les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(\alpha) = \alpha$.
$f(0) = 1 \neq 0$ donc $\alpha \neq 0$, et $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{e^\alpha - 1}$.

$$f(\alpha) = \alpha \iff \frac{1}{e^\alpha - 1} = 1 \iff e^\alpha = 2 \iff \alpha = \ln(2)$$

La fonction f admet don un unique point fixe, $\alpha = \ln(2)$.

2) **a)** Pour tout $x \in [0, +\infty[$, posons $\varphi(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$.
La fonction φ est $\mathscr{C}^\infty$ et $\varphi'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2(e^x - 1 - x)e^x$. En dérivant $x \mapsto e^x - 1 - x$ on montre que cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc que $e^x - 1 - x \geqslant e^0 - 1 - 0 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi $\varphi' \geqslant 0$ et φ est croissante, donc $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$$

(on peut aussi astucieusement factoriser par e^x, et l'expression s'étudie beaucoup plus rapidement)

b) Soit $x \in]0, +\infty[$, d'après la question précédente

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \geqslant 0$$

c) $f'(0) = -\dfrac{1}{2} \in [-1/2, 0[$. D'après A.2)a), $f' < 0$, et d'après la question précédente, $f' \geqslant -1/2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En conclusion

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est continue et dérivable entre u_n et α, donc l'inégalité des accroissements finis s'écrit

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant (\sup_{x \in I} |f'(x)|)|u_n - \alpha|$$

Où I est l'intervalle de bornes u_n et α. Puisque $\sup_{x\in I}|f'(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f'(x)| = \frac{1}{2}$ d'après c),

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1}-\alpha| = |f(u_n)-f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$

3) Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n): \quad |u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|1-\alpha|$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Donc, d'après la question précédente, il vient

$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|1-\alpha|$$

Et $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \geqslant 0 \qquad |u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|1-\alpha|$

4) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n-\alpha| = 0$ et la suite (u_n) converge vers $\alpha = \ln 2$.

Exercice 5 (CAPES 2007, partie 2 (11 pts))

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$, $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n = a_n\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$.

En développant le produit, il vient $\boxed{\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}}$ (2 pts)

La preuve n'est pas demandée. Elle se ferait par récurrence sur le degré.

2) **a)** Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

$$e^{i(2p+1)\varphi} = (e^{i\varphi})^{2p+1} = (\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))^{2p+1} = \sum_{q=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{k} i^q \sin^q(\varphi)\cos^{2p+1-q}(\varphi)$$

Ainsi, $\quad \sin((2p+1)\varphi) = \Im(e^{i(2p+1)\varphi}) = \Im\left(\sum_{q=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{k} i^q \sin^q(\varphi)\cos^{2p+1-q}(\varphi)\right).$

On ne garde que les $q = 2k+1$ impairs, donc k varie entre 0 et p et il vient (2 pts)

$$\boxed{\sin((2p+1)\varphi) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\cos^{2p-2k}(\varphi)\sin^{2k+1}(\varphi)}$$

b) Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $\varphi \neq 0[\pi]$, on a $\sin(\varphi) \neq 0$, donc (0.5 pts)

$$\begin{aligned}
\sin((2p+1)\varphi) &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\cos^{2p-2k}(\varphi)\sin^{2k+1}(\varphi)\\
&= \sin^{2p+1}(\varphi)\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\cos^{2p-2k}(\varphi)\left(\frac{\sin^{2k+1}(\varphi)}{\sin^{2p+1}(\varphi)}\right)\\
&= \sin^{2p+1}(\varphi)\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\left(\frac{\cos^{2p-2k}(\varphi)}{\sin^{2p-2k}(\varphi)}\right)\\
\sin((2p+1)\varphi) &= \sin^{2p+1}(\varphi)\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\left(\text{cotan}^2(\varphi)\right)^{p-k}
\end{aligned}$$

3) **a)** On remplace γ_k par son expression, et d'après 2)b) ($k\pi/(2p+1) \neq 0[\pi]$) il vient

$$\begin{aligned} P(\gamma_k) &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\gamma_k^{p-k} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\left(\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)^{p-k} \\ &= \frac{\sin\left((2p+1)\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)}{\sin^{2p+1}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin^{2p+1}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = 0 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout entier } k \in \{1,\dots,p\},\ P(\gamma_k) = 0.}$ (1 pts)

b) Pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$, (0.5 pts)

$$0 < \frac{\pi}{2p+1} \leqslant \frac{k\pi}{2p+1} \leqslant \frac{p\pi}{2p+1} < \frac{p\pi}{2p} = \frac{\pi}{2}$$

Ce n'est pas une question de limites ici, mais d'inégalité (vraies pour tout k et tout p, et pas seulement lorsque $p \to +\infty$).

On vient de montrer que les γ_k sont des racines de P. Il reste donc à prouver qu'ils sont distincts.
La fonction cotan est strictement décroissante de $]0,\pi/2[$ sur $]0,+\infty[$, donc cotan^2 est strictement décroissante de $]0,\pi/2[$ sur $]0,+\infty[$.
Ainsi, vu que les $k\pi/(2p+1) \in]0,\pi/2[$ sont tous distincts, leurs images γ_k par cotan^2 sont aussi toutes distinctes (la fonction est injective). De plus, il y en a p, et le polynôme P est de degré p, donc il ne peut pas y avoir d'autres racines.
Donc $\boxed{\text{le polynôme } P \text{ possède } p \text{ racines distinctes, } \{\gamma_1,\dots,\gamma_p\}.}$ (1 pts)

c) D'après, 1), $\sigma_1 = \gamma_1 + \cdots + \gamma_p = -\dfrac{a_{p-1}}{a_p}$. D'où en remplaçant (1 pts)

$$\sum_{k=1}^{p}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = -\frac{(-1)^1\binom{2p+1}{3}}{(-1)^0\binom{2p+1}{1}} = \frac{\frac{(2p+1)(2p)(2p-1)}{3!}}{2p+1} = \frac{p(2p-1)}{3}$$

Et en utilisant $1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi$, il vient (1 pts)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} &= \sum_{k=1}^{p}\frac{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)+\cos^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \sum_{k=1}^{p}\left(1+\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right) \\ &= p + \sum_{k=1}^{p}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = p + \frac{p(2p-1)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3} \end{aligned}$$

4) **a)** Pour tout $\varphi \in]0,\pi/2[$, (1 pts)

$$\begin{aligned} 0 < \sin\varphi < \varphi < \tan\varphi &\implies 0 < \frac{1}{\tan\varphi} < \frac{1}{\varphi} < \frac{1}{\sin\varphi} \\ &\implies 0 < \frac{1}{\tan^2\varphi} < \frac{1}{\varphi^2} < \frac{1}{\sin^2\varphi} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$, puisque $\gamma_k \in]0,\pi/2[$, il vient

$$\frac{1}{\tan^2\gamma_k} < \frac{1}{\gamma_k^2} < \frac{1}{\sin^2\gamma_k}$$

En sommant sur k et en remplaçant avec les expression de 3)c), l'encadrement précédent s'écrit

$$\frac{p(2p-1)}{3} = \sum_{k=1}^{p}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

b) En divisant par $\dfrac{(2p+1)^2}{\pi^2} > 0$ l'encadrement précédent, il vient

$$\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} < \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}$$

Par encadrement, on trouve donc $\boxed{\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$ (1 pts)

FIN DE L'ÉPREUVE