 Vendredi 4 septembre 2015

Épreuve de Mathématiques 1

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On identifiera un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à la fonction polynomiale associée sur $\mathbb{R}$.
Enfin, P' et P'' désigneront respectivement les polynômes dérivés de P et P'.
Soit (T_k) la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1 \quad ; \quad T_1 = X \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$$

Dans tout le problème et sauf avis contraire, n désigne un entier naturel.

1) Déterminer les polynômes T_2, T_3 et T_4.

2) Quel est le degré de T_n et son coefficient dominant ?

3) Étudier la parité de T_n.

4) Calculer $T_n(1)$, $T_n(-1)$ et $T_n(0)$.

5) Montrer que T_n est le seul polynôme qui vérifie :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

6) Dans cette question uniquement, on suppose $n \neq 0$.

- **a)** Pour quelles valeurs de θ a-t-on : $T_n(\cos\theta) = 0$?
- **b)** Montrer alors que T_n possède n racines réelles distinctes dans $[-1, 1]$. Conclure.

7) Déterminer les racines de T_n'.

Exercice 2

Dans cette partie, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels.
On définit sur $\mathbb{R}[X]$ l'application Δ qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\Delta(P)$ défini par :

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

Cette application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, ce qu'on ne demande pas de justifier. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'endomorphisme Δ^n obtenu en composant n endomorphismes égaux à Δ :

$$\Delta^n = \underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{n \text{ fois}}$$

On considère la famille de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ P_1(X) = X \\ P_n(X) = \dfrac{X(X+1)\dots(X+n-1)}{n!} = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(X+j) \quad \text{pour } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Dans les questions qui suivent, n désigne toujours un entier supérieur ou égal à 1.

1) **a)** Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.

b) Soit k un entier vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$.
Déterminer $\Delta(P_k)(X)$ en fonction de $P_{k-1}(X+1)$. Donner également la valeur de $\Delta(P_0)$.

c) Soit m un entier supérieur ou égal 1 et k un entier vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$.
Déterminer $\Delta^m(P_k)$ en distinguant les cas : $0 \leqslant m \leqslant k-1$, $m = k$ et $m \geqslant k+1$.

d) Déduire de ce qui précède que, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, alors $\Delta^n(P) = 0$.

2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

a) Démontrer que le polynôme $\Delta^n(P)$ est donné par la formule

$$\Delta^n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k)$$

Indication : *On pourra effectuer une récurrence.*

b) En déduire, pour tout entier r vérifiant $0 \leqslant r \leqslant n-1$, l'égalité suivante,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (X+k)^r = 0 \tag{1}$$

Exercice 3

Dans cet exercice, on pose, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \quad , \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad v_n = e^{1-S_{n-1}}$$

1) Calculer les trois premiers termes des suites (u_n) et (v_n).

2) Déterminer un équivalent simple de (u_n).

3) Déterminer la nature de la série (S_n). Que peut-on dire de la suite (v_n) ?

4) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) - n - \ln(n!)$.

5) En déduire une expression de (v_n) en fonction de n.

6) Conclure que $n! \sim K n^n e^{-n} \sqrt{n}$, où K est une constante strictement positive.

Exercice 4

Dans tout le problème, on désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé du plan.

A. Étude de la fonction f

1) Étude de f en 0.

a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

b) Peut-on déduire du développement limité du a), <u>sans nouveaux calculs</u>, que : (justifier avec soin)

- f est continue en 0 ?
- f est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$?
- f est deux fois dérivable en 0 et la valeur de $f''(0)$?

c) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

d) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 et préciser la position de (C) par rapport à T au voisinage de 0.

2) Variations de f.
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - e^x + 1$.

a) Dresser le tableau de variations complet de g et donner le signe de g.

b) Donner les variations de f.

c) Donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser la nature des branches infinies de (C) : montrer en particulier que (C) possède deux asymptotes et préciser la position de (C) par rapport à ses asymptotes.

d) Donner l'allure de (C) (faire apparaître les asymptotes et T).

B. Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f.

On considère la suite(u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

2) **a)** Établir : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$.

b) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) + \dfrac{1}{2} \geqslant 0$.

c) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

3) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1 - \alpha|$.

4) En déduire que (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 5

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$: $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$.

Rappeler la formule permettant de calculer la somme $\sigma_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ des racines de P en fonction de ses coefficients a_k, $k \in \{0, \ldots, n\}$. (<u>Indication</u> : *Retrouver la formule pour* $n = 2$ *ou* 3).

2) **a)** Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Démontrer l'égalité

$$\sin((2p+1)\varphi) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi) \sin^{2k+1}(\varphi)$$

où $\dbinom{2p+1}{2k+1}$ désigne le coefficient binomial pour $k \in \{0, \ldots, p\}$.

b) En déduire que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $\varphi \neq 0[\pi]$, on a

$$\sin((2p+1)\varphi) = \sin^{2p+1}(\varphi) \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \left(\operatorname{cotan}^2(\varphi)\right)^{p-k}$$

où $\operatorname{cotan} \varphi = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} X^{p-k}$$

a) Pour tout entier $k \in \{1, \ldots, p\}$, on pose $\gamma_k = \operatorname{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)$. Calculer $P(\gamma_k)$.

b) Vérifier que, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, le réel $\dfrac{k\pi}{2p+1}$ appartient à l'intervalle $]0, \pi/2[$. En déduire que le polynôme P possède p racines distinctes, que l'on déterminera.

c) En déduire les égalités

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

4) **a)** En admettant que, pour tout $\varphi \in]0, \pi/2[$, $0 < \sin\varphi < \varphi < \tan\varphi$, montrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, on a l'encadrement

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}$$

b) Démontrer que $\lim\limits_{p \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

FIN DE L'ÉPREUVE