BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans ce sujet, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Préliminaire : Questions de cours

1. Soit Σ une surface dont un paramétrage de classe $\mathcal{C}^1$ est $(u,v) \mapsto M(u,v)$.
   Donner la définition d'un point régulier de Σ.
2. (a) Donner la définition d'une matrice carrée Q orthogonale.
   (b) Soit Q une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Quelles sont les natures possibles de l'endomorphisme canoniquement associé à Q ? Quels calculs peut-on effectuer pour distinguer ces différentes natures ? Préciser le lien entre le résultat des calculs et la nature. (On ne demande pas les éléments caractéristiques.)

Partie I : 2 surfaces

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la surface S d'équation cartésienne

$$z = (y - 2\sqrt{2}x)y$$

ainsi que la surface Σ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}uv \\ y = (u+v)^2 \\ z = (u^2 - v^2)^2 \end{cases}, \ (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

On note $M(u,v)$ le point de Σ de paramètres u et v.

1. *A propos de S.*
   (a) Quelle est la nature de l'intersection de S avec un plan d'équation $y = \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$? Qu'en déduit-on pour S ?
   (b) Quelle est la nature de l'intersection de S avec un plan d'équation $x = \beta$, où $\beta \in \mathbb{R}$?
   (c) i. Quelle est la nature de l'intersection Λ_γ de S avec un plan d'équation $z = \gamma$, où $\gamma \in \mathbb{R}$? Distinguer différents cas suivant les valeurs de γ.
       ii. On note O_γ le point de coordonnées $(0,0,\gamma)$. Tracer les courbes Λ_γ dans le repère $(O_\gamma\,;\vec{i},\vec{j})$ pour $\gamma \in \{-2, 0, 1\}$.
       On pourra confondre les points O_γ et tracer les 3 courbes dans le même repère.
   (d) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à S en un point M_0 de S de coordonnées (x_0, y_0, z_0). Cette équation ne devra pas dépendre de z_0.
   (e) Dans le cas particulier où M_0 est le point O, préciser la position relative de S et du plan tangent.
2. *Comparaison de S et Σ.*
   (a) Vérifier que $\Sigma \subset S$.
   (b) A-t-on $\Sigma = S$?
3. *A propos de Σ.*
   (a) Déterminer la nature géométrique de l'ensemble des points non réguliers de Σ.
   (b) Soit $M(u,v)$ un point régulier de Σ. Déterminer, en fonction des paramètres u et v, une équation cartésienne du plan tangent à Σ au point $M(u,v)$.

Partie II : Une famille de courbes

Soit a un réel distinct de 1 et -1. On note $A_a(u)$ le point $M(u, au)$ de Σ et Γ_a l'ensemble des points $A_a(u)$ lorsque u parcourt $\mathbb{R}^{+\star}$.

1. Donner une représentation paramétrique de Γ_a.
2. (a) Justifier que les vecteurs $\dfrac{d\overrightarrow{OA_a}}{du}(u)$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{OA_a}}{du^2}(u)$ engendrent un plan.

   On note alors $P_a(u)$ le plan passant par $A_a(u)$ et dirigé par les vecteurs $\dfrac{d\overrightarrow{OA_a}}{du}(u)$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{OA_a}}{du^2}(u)$.

   (b) Justifier, à l'aide de la partie I, l'existence de la normale à Σ en tout point $A_a(u)$ de Γ_a.

   (c) Déterminer a pour qu'en tout point $A_a(u)$ de Γ_a, la normale à Σ en $A_a(u)$ soit incluse dans $P_a(u)$.
   On donne, si nécessaire, $a^4 + 5a^3 + 6a^2 + 5a + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 + 4a + 1)$.

Partie III : Autour de Γ_{-2}

Dans cette partie, nous allons étudier le cas particulier $a = -2$ des courbes Γ_a définies dans la partie II.

1. On considère les vecteurs $\vec{w} = \dfrac{1}{3}\,\vec{i} + \dfrac{2}{3}\sqrt{2}\,\vec{j}$ et $\vec{u} = \vec{k}$.

   (a) Déterminer un vecteur $\vec{v}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Ecrire la matrice de passage Q_1 de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et la matrice de passage Q_2 de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$.

   (c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice Q_2.

   (d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice Q_1.
2. Les coordonnées d'un point M dans le repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$ sont $(x,\,y,\,z)$ et ses coordonnées dans $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{w})$ sont $(x',\,y',\,z')$. Quelle relation existe-t-il entre la matrice Q_1 et les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$?
3. En déduire une représentation paramétrique de Γ_{-2} dans le repère $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v},\,\vec{w})$. Quelle est la nature de Γ_{-2} ?

On se place à nouveau dans le repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$, et on considère le système différentiel

$$S_{-2} : X' = B_{-2}\, X \text{ où } B_{-2} \text{ est la matrice } \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2\sqrt{2}}{5} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{4\sqrt{2}}{5} & 2 \end{pmatrix}$$

On appelle courbe intégrale du système différentiel S_{-2} toute courbe dont une représentation paramétrique est $t \in \mathbb{R} \mapsto X(t)$, où X est une solution de S_{-2}.

4. Soit x_0, y_0 et z_0, trois réels donnés. Que peut-on dire du nombre de solutions de S_{-2} vérifiant $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$?

5. (a) Justifier que B_{-2} est diagonalisable et la diagonaliser. On donnera une matrice diagonale D semblable à B_{-2}, la matrice de passage P retenue, ainsi que la relation liant B_{-2}, P et D (le calcul de P^{-1} n'est pas demandé).

   (b) En déduire les solutions de S_{-2}.

   (c) Démontrer que toutes les courbes intégrales de S_{-2} sont planes.

   (d) La courbe Γ_{-2} est-elle une courbe intégrale de S_{-2} ?

6. On suppose dans cette question uniquement que a est à nouveau un réel quelconque. Proposer une matrice B_a telle que Γ_a soit une courbe intégrale du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = B_a\, X$.

La surface S s'appelle paraboloïde hyperbolique ... ainsi que peuvent le suggérer les différentes courbes rencontrées dans ce problème. Elle ressemble à une selle de cheval. Quant au plan $P_a(u)$, il s'agit du plan osculateur à Γ_a au point $A(u)$.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques B

Le sujet de cette année était constitué d'un problème comprenant un préliminaire de quatre questions de cours, puis de trois parties. La première partie consistait en l'étude de deux surfaces, dont l'une était incluse dans l'autre (lignes de niveaux, plan tangent...). La seconde partie s'intéressait à une famille de courbes tracées sur l'une des surfaces précédentes. Enfin, la dernière partie avait pour objet de déterminer la nature de l'une de ces courbes, avant de montrer qu'il s'agissait d'une courbe intégrale d'un système différentiel.

Les résultats sont très contrastés, mais globalement un peu décevants pour un problème dont beaucoup de questions étaient des applications directes du cours. Si on trouve peu de copies vides, on trouve par contre près de 7 % de copies où le nombre de questions traitées avec succès ne dépasse pas le nombre de questions de cours du préliminaire. On trouve également quelques très bons candidats ayant traité avec succès la quasi-totalité du sujet. Les questions de cours ou d'application directe du cours sont trop souvent négligées (voir le détail question par question). Les correcteurs ne peuvent que conseiller aux futurs candidats d'apprendre et de maîtriser leur cours.

La présentation des copies s'est peu améliorée cette année. Si heureusement, on compte très peu de copies qui ressemblent à des torchons, par contre, à peine un candidat sur deux $\boxed{\text{encadre}}$ les résultats de ses démonstrations, comme cela est demandé par l'énoncé... Pour cela, l'usage d'une règle est indispensable et il est conseillé d'utiliser une couleur différente de la couleur d'écriture ...
Par ailleurs, il est rappelé (Cf. la notice du concours) que « les épreuves doivent être écrites à l'encre bleue et/ou noire, exception faite pour des schémas ou graphiques nécessitant une palette plus large de couleurs d'encre alors autorisées ». L'usage de stylos dont l'encre est susceptible de traverser le papier est également à éviter.
Encore plus que les années précédentes, l'orthographe de très nombreuses copies laisse à désirer. Il serait souhaitable que des mots d'usage courant en mathématiques et dont la plupart figurent dans l'énoncé soient correctement orthographiés, et tout particulièrement : mathématiques, tangent(e), parabole, cartésien(ne), colonne, gradient ... On note également une nette dégradation de la grammaire : accord genre et/ou nombre, mais aussi conjugaison. On ne devrait pas trouver chez de futurs ingénieurs, qui auront à communiquer par écrit, des erreurs du type « on calcul » ou « on a (ou on à) montrer ». Dans certaines copies, la situation est telle que les correcteurs ne parviennent pas à comprendre ce que les candidats essayent de dire.

On constate également de nombreuses confusions de vocabulaire et/ou de notions : u et $\vec{u}$, discriminant et déterminant, isomorphisme et isométrie, équation, coordonnées et paramétrage, plan tangent et tangente, sommet, centre et origine, courbe et surface, résoudre et calculer, vecteur propre et sous-espace propre, composée et combinaison...
De plus, un peu plus d'attention vis à vis de la nature des objets qu'ils manipulent, devrait permettre aux candidats d'éviter de : dériver une surface ou une courbe, calculer le déterminant de deux vecteurs de l'espace, de dire que le produit vectoriel de deux vecteurs est positif ...

Les candidats sont également invités à respecter les notations de l'énoncé.

Avant de passer au détail question par question, on rappelle aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre ...

Questions de cours.

Les quatre questions de cours portaient sur des thèmes qui étaient repris dans la suite du sujet avec les mêmes notations. Cela a permis de déterminer si les candidats ne traitent pas certaines questions à cause du cours non su, ou parce qu'ils ne parviennent pas à mettre en œuvre celui-ci. Les résultats sont les suivants : 11 % des candidats donnent 4 bonnes réponses, 16 % donnent 3 bonnes réponses, 24 % donnent 2 bonnes réponses, 28 % donnent 1 bonne réponse et parmi les 21 % de candidats ne donnant aucune bonne réponse, 1 sur 7 n'a répondu à aucune des 4 questions. En ce qui concerne les points réguliers d'une surface paramétrée, seuls 37 % des candidats donnent la bonne réponse, par contre, 63 % des candidats donnent une définition correcte d'une matrice orthogonale. Malheureusement, seuls 23 % des candidats connaissent la nature d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et savent comment l'identifier.

Partie I

<u>Questions 1.a. et 1.b.</u> La majorité des candidats ont identifié correctement une droite et une parabole, mais la surface S a été peu souvent reconnue comme étant une surface réglée. De plus, il est rappelé aux candidats qu'une représentation cartésienne d'une courbe de l'espace s'écrit avec deux équations et que, dans l'espace, $z = ay + b$ est une équation de plan. Enfin, signalons que nombre de candidats ont fait du zèle en donnant des éléments caractéristiques des courbes identifiées. Malheureusement, le sommet de la parabole avait souvent l'une de ses coordonnées fausse ; quant à la pente, le coefficient directeur et l'ordonnée (ici le terme « cote » aurait été plus approprié) à l'origine de la droite, ce sont des notions qui n'ont pas été définies dans l'espace.

<u>Question 1.c.</u> Lorsqu'elle est traitée, l'étude de la conique est souvent bien faite. Mais il est clair que de nombreux candidats appliquent une « recette » sans en comprendre le sens. En effet, l'étude est souvent complète, y compris la gestion de la partie linéaire (inexistante ici...) alors que pour répondre à la première partie de cette question, seules les valeurs propres de la matrice sont utiles. De plus, presqu'aucun candidat n'est capable d'exploiter son étude pour construire les courbes (les axes du nouveau repère sont souvent devenus les

asymptotes de l'hyperbole). Enfin, de nombreux candidats qui utilisent la bonne formule pour trouver les coordonnées d'un point de la conique dans le nouveau repère, ne donnent pas la bonne réponse à la question III.2.
Par ailleurs, le cas $\gamma = 0$ a souvent été mal géré. De nombreux candidats supposent sans raison que $y \neq 0$; quant à ceux qui n'oublient pas le cas $y = 0$ (dans le plan (xOy)), certains y reconnaissent un plan et d'autres un point.
En ce qui concerne le tracé, celui-ci doit être effectué sur la feuille de papier millimétré qui est distribuée à cet effet. Cette année, de nombreux candidats l'ont effectué sur leur copie ou au dos de la feuille de papier millimétré. Il est rappelé que cette feuille doit être rendue avec la copie même si elle n'a pas été utilisée.
Peu de candidats ont mené le tracé à bien. Il est impératif que les candidats fassent figurer le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sur leur copie. De plus, comme il y a plusieurs courbes, il convient d'utiliser des couleurs différentes et de mettre une légende.
Signalons enfin que la droite du plan d'équation $y = 0$ est l'axe des abscisses.

Question 1.d. Un peu moins d'un candidat sur deux donne une réponse correcte à cette question qui est une application directe du cours. On remarque que de nombreux candidats ont pris le temps de définir la fonction dont ils allaient calculer le gradient.

Question 1.e. Peu de candidats ont répondu à cette question. Certains confondent la position relative de la surface et de son plan tangent avec la nature du point critique de la fonction associée. On note quelques utilisations de la matrice Hessienne (ou du développement limité à l'ordre 2) d'une fonction à trois variables.

Question 2.a. Cette question a été généralement traitée avec succès à condition de ne pas être trop regardant sur la rédaction et/ou l'efficacité des calculs.

Question 2.b. Pour cette question, il convenait de donner explicitement un point qui appartenait à S et pas à Σ en exploitant, par exemple, le fait que l'ordonnée des points de Σ est positive.

Question 3.a. Les résultats de la première question de cours donnent une idée de ceux de cette question. De nombreux candidats évoquent le gradient de $(u, v) \mapsto M(u, v)$ alors que cette notion n'existe pas pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Le mot d'ordre pour mener à bien ce type de question (trouver où une expression s'annule) est « factoriser ».
Peu de candidats ont identifié correctement la nature de l'ensemble des points non réguliers. Nombre d'entre eux ont confondu cet ensemble avec l'ensemble des couples (u, v).

Question 3.b. Il est clair que de nombreux candidats ne font pas le lien entre cette question et la précédente. Près d'un candidat sur deux n'a pas abordé cette question et seuls 23% ont donné une réponse correcte à cette question d'application directe du cours. On trouve de nombreuses équations de plan qui ne contiennent pas de x, y et z, ou qui ne passent pas par $M(u, v)$ ... Il est signalé aux candidats que les correcteurs ne développent pas les déterminants à leur place.

Partie II

Question 1. A part quelques candidats qui ont cru que (u, au) étaient les coordonnées du point et quelques propositions étranges, les coordonnées de $A_a(u)$ sont correctes. Mais les représentations paramétriques proposées n'indiquent que très rarement quel est le paramètre et le lieu de ce paramètre, ou alors, il y en a deux (a et u) ... ce qui ne donne pas en général une courbe.

Question 2.a. La non colinéarité des deux vecteurs est souvent annoncée, bien plus rarement démontrée. On pouvait pour cela utiliser un produit vectoriel, mais pas de produit scalaire, ni de déterminant. Certains candidats semblent penser, à tort, qu'un vecteur et son vecteur dérivée sont toujours orthogonaux. Signalons également que le vecteur nul est colinéaire (et orthogonal) à tous les autres vecteurs.

Question 2.b. On déplore l'attitude de certains candidats qui invoquent le résultat la question I.3.a., alors qu'ils ne l'ont pas traitée.

Question 2.c. Cette question a été peu traitée. Mais les méthodes proposées étaient souvent correctes, même si certaines étaient peu efficaces. Les rares candidats à avoir trouvé les valeurs de a sont ceux qui ont factorisé les expressions utilisées au fur et à mesure.

Partie III

Question 1.a. Cette question a souvent été bien traitée. Peu de candidat ont pensé à vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ étaient orthogonaux et unitaires.

Question 1.b. Un peu plus d'un candidat sur deux donne une bonne réponse à cette question d'application directe du cours. Pour une raison inconnue, il semble qu'un certain nombre de candidats aient cru que Q_2 était l'inverse de Q_1, ce qui n'était pas le cas.

Question 1.c et 1.d. Peu de candidats ont vérifié que les matrices Q étaient orthogonales. Bien que ces matrices s'appellent « orthogonales », leurs colonnes forment une base « orthonormale » de (à préciser impérativement) $\mathbb{R}^3$. Beaucoup de candidats ont cru reconnaître, à tort, la forme réduite de la matrice d'une isométrie, et certains semblent découvrir qu'il existe d'autres angles que les fractions usuelles de π. On trouve de nombreuses contradictions avec ce que les candidats ont annoncé dans la question de cours. Ces questions ont été peu réussies, le vocabulaire est souvent approximatif et il manque régulièrement une conclusion à la fin de la réponse.

Question 2. Moins d'un candidat sur deux donne une réponse correcte à cette question de cours.

Question 3. De très nombreuses erreurs. Si la nouvelle expression n'est pas plus simple que celle de départ, c'est que l'une des formules utilisées doit être fausse, à moins que cela ne soit une erreur de calcul ...

Question 4. 6 candidats sur 10 ont reconnu un problème de Cauchy.

Question 5.a. Si on laisse de côté les fréquentes erreurs de calcul, la plupart des candidats savent diagonaliser une matrice, même si les justifications sont régulièrement fausses ou douteuses. Par contre, la rédaction laisse à désirer (liste non exhaustive) : on trouve une demi-douzaine de notations différentes pour les sous-espaces propres, il convient donc de les définir avec précision. On lit souvent « les valeurs propres sont $\{0, 1, 2\}$ ». On ne sait pas d'où viennent les systèmes. Il n'est pas rare que l'on trouve

$$\ll \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(B_{-2}) \Leftrightarrow \text{... Conclusion : } \mathrm{Ker}(B_{-2}) = \mathrm{Vect}(0, 0, 1) \gg$$

ou encore « $E_0 = \mathrm{Ker}(B_{-2}) \Leftrightarrow$ système ». Quant à ceux qui effectuent des combinaisons linéaires sur les colonnes de la matrice pour trouver son noyau, ils doivent justifier a priori de la dimension de ce même noyau.

Question 5.b. Cette question a été assez peu traitée, mais, lorsque cela est le cas, plutôt avec succès. Précisons que l'on demandait les solutions de S_{-2} et non celles du problème de Cauchy de la question III.4.

Question 5.c., 5.d et 6. Ces questions ont été très peu traitées. On y trouve cependant quelques très bonnes réponses.

Pour finir, un conseil aux futurs candidats : lorsque le temps dévolu à l'épreuve est presque terminé, il est préférable de ne faire qu'une ou deux questions supplémentaires et de les faire bien, plutôt que d'en faire quatre ou cinq et de les bâcler.

BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les quatre parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Dans ce sujet, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Partie I

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$, on condidère la surface S_1 d'équation cartésienne $xy^2+yz^2+zx^2+2xyz+5=0$, la surface S_2 d'équation cartésienne $2x-3y+z=7$ et le point M_0 de coordonnées $(1,-1,2)$. On note Λ l'intersection de S_1 et S_2.

1. Vérifier que $M_0 \in \Lambda$.
2. Déterminer une équation du plan tangent à S_1 en M_0.
3. En déduire une représentation cartésienne, puis un vecteur directeur de la tangente à Λ en M_0.

Partie II

Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$, on considère la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=t^2+\dfrac{2}{t} \\ y(t)=\dfrac{1}{t^2}+2t \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}^{-\star}.$$

Pour tout t strictement négatif, on désigne par M_t le point de Γ de paramètre t.

1. (a) Justifier qu'une représentation paramétrique de la normale à Γ au point M_t, $t\in\mathbb{R}^{-\star}$, est :

$$\left\{\begin{array}{l} x_t(u)=t^2+\dfrac{2}{t}+u \\ y_t(u)=\dfrac{1}{t^2}+2t-tu \end{array}\right.,\ u\in\mathbb{R}$$

   (b) En déduire une représentation paramétrique de la développée de Γ.

   (c) Utiliser ce résultat pour donner le centre et le rayon du cercle de courbure de Γ au point M_{-1}, de paramètre $t=-1$.

2. Soit Σ le cercle de centre Ω de coordonnées $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, et de rayon $r>0$. On dit que Σ et Γ sont tangents en un point A si
   - $A\in\Sigma\cap\Gamma$;
   - la tangente à Σ en A et la tangente à Γ en A sont confondues.

   (a) Exprimer b et r en fonction de a pour que Σ et Γ soient tangents en M_{-1}.

   (b) Dans ces conditions, donner une équation de Σ sous la forme $f_a(x,y)=0$ ne dépendant que du paramètre a.

   (c) Effectuer les développements limités de $x(t)$ et $y(t)$ à l'ordre 3 en $t=-1$.
   On donne $f_a(x(t),y(t))=(28-4a)(t+1)^2+(28-4a)(t+1)^3+o((t+1)^3)$

   (d) Déterminer a pour qu'au voisinage de $t=-1$, $f_a(x(t),y(t))=o\big((t+1)^3\big)$.
   Quelle(s) remarque(s) peut-on faire concernant Ω et r ?

Partie III

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sera noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et la norme du vecteur $\vec{u}$ sera notée $\|\vec{u}\|$.

1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et I un point du plan.
   Une droite $\mathcal{D}$ passant par I et sécante à $\mathcal{C}$ coupe $\mathcal{C}$ en A et B.
   On note A' le symétrique de A par rapport à O.
   (a) Démontrer que $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IA'} = IO^2 - R^2$.
   On remarque que la valeur de $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$ est indépendante de la droite $\mathcal{D}$ sécante à $\mathcal{C}$ choisie. On note $\sigma_{\mathcal{C}}(I)$ ce nombre.
   (b) Quelle information le signe de $\sigma_{\mathcal{C}}(I)$ donne-t-il sur la position du point I ?
   (c) Soit I un point du plan tel que $\sigma_{\mathcal{C}}(I) \geqslant 0$, Λ l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{OM} = 0$, et T un point de $\Lambda \cap \mathcal{C}$.
      i. Quelle est la nature de Λ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
      ii. Démontrer que $\sigma_{\mathcal{C}}(I) = IT^2$.
2. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres respectifs O et O', distincts, de rayons respectifs $R > 0$ et $R' > 0$. On désigne par Ω le milieu du segment $[OO']$ et par Δ l'ensemble des points I du plan vérifiant $\sigma_{\mathcal{C}}(I) = \sigma_{\mathcal{C}'}(I)$.
   (a) Démontrer que
   $$\sigma_{\mathcal{C}}(I) = \sigma_{\mathcal{C}'}(I) \Longleftrightarrow 2\,\overrightarrow{OO'}\cdot\overrightarrow{\Omega I} = R^2 - R'^2$$
   (b) *i.* Soit I_1 et I_2 deux points distincts de Δ. Démontrer que les droites (I_1I_2) et (OO') sont orthogonales.
      ii. Déterminer un point I_0 appartenant à Δ et (OO').
      iii. En déduire la nature de Δ.
   (c) Que dire de plus sur Δ lorsque $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants ou tangents ? Ou lorsque les deux cercles ont le même rayon ?
   (d) Dans cette question, l'unité de longueur est le centimètre. On prend $OO' = 10$, $R = 5$ et $R' = 3$. Tracer Δ.
3. (a) Soient A, B et C trois points non alignés du plan, et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Soit I un point de la droite (AB) distinct de A et B, et D un point de la droite (IC) vérifiant $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$.
   Démontrer que D appartient au cercle $\mathcal{C}$.
   (b) On se place désormais dans le plan complexe. Le vecteur $\vec{u}$ a pour affixe $z \in \mathbb{C}$, et le vecteur $\vec{v}$ a pour affixe $z' \in \mathbb{C}$.
      i. Rappeler la relation entre $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
      ii. En déduire que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \mathcal{R}e\left(z\overline{z'}\right)$ ($\mathcal{R}e$ désigne la partie réelle).
   (c) Soient A, B, C, D et I les points d'affixes complexes respectives
   $$z_A = -3 - i,\ z_B = 5i,\ z_C = -1 - 7i,\ z_D = 14 - 2i \text{ et } z_I = -7 - 9i.$$
   Démontrer que A, B, C et D sont cocycliques (c'est-à-dire : sur un même cercle).

Partie IV

1. Question préliminaire.
   Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie d, et f un endomorphisme de E. $\operatorname{Ker} f$ désigne le noyau de f, et $\operatorname{Im} f$ son image. On note $f^2 = f \circ f$. Enfin, id_E est l'endomorphisme identité de E. λ désigne un réel.

   (a) Démontrer que :
   $$\operatorname{Ker}(f - \lambda id_E) \subset \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda^2 \, id_E)$$
   Quel lien peut-on en déduire entre les valeurs propres de f et celles de f^2 ?

   (b) Démontrer que si $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \neq \{0\}$, alors
   $$\dim \left(\operatorname{Ker} f^2\right) \geqslant \dim\left(\operatorname{Ker} f\right) + 1$$

   (c) On désigne par P_f et P_{f^2} les polynômes caractéristiques respectifs de f et f^2. Démontrer que $P_{f^2}(X^2) = (-1)^d \, P_f(X) \, P_f(-X)$.

2. Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
   Soit f l'application définie, pour tout polynôme P de E, par :
   $$f(P) = (X^2 - X + 1)\, P(-1) + (X^3 - X)\, P(0) + (X^3 + X^2 + 1)\, P(1)$$

   (a) Démontrer que f est un endomorphisme de E.

   (b) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. Préciser leur dimension.

   (c) f est-il injectif ? Surjectif ?

   (d) Justifier que 0 est valeur propre de f. Que peut-on dire de sa multiplicité ?

   (e) Démontrer que les polynômes $Q_1 = 3\,X^3 + 4\,X^2 - 3\,X + 4$ et $Q_2 = X^3 + X$ sont des vecteurs propres de f. Quelles sont les valeurs propres associées ?

   (f) A-t-on $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$?

   (g) Quelles sont les valeurs propres de f^2 ? En déduire que f^2 est diagonalisable.

   (h) f est-il trigonalisable ? Diagonalisable ? Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Le cercle de courbure de la partie II s'appelle également cercle osculateur (du latin osculari : embrasser)... C'est le cercle « le plus proche » de la courbe.
Dans la partie III, $\sigma_{\mathcal{C}}(I)$ est la puissance du point I par rapport au cercle $\mathcal{C}$ et Δ est l'axe radical des deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Ces deux objets, avec entre autres la notion de division harmonique conduiront au XIX^e *siècle à la géométrie projective.*

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques B

Le sujet de cette année est constitué de quatre parties totalement indépendantes constituant trois blocs d'égale importance et de difficulté progressive.
Le premier bloc, regroupant les parties I et II porte sur la géométrie analytique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Il s'agit dans la première partie de déterminer la tangente à une courbe de l'espace définie comme intersection de deux surfaces. Dans la seconde partie, on recherche la développée d'une courbe paramétrée du plan à l'aide de l'enveloppe des normales avant de vérifier sur un point particulier que le cercle de courbure est le cercle « le plus proche » de la courbe. Ces deux parties sont des applications directes du cours. Pourtant, elles ont été les moins abordées par les candidats : un candidat sur six a fait l'impasse sur la partie I (sauf 1 (a)) et autant sur la partie II, on passe à un candidat sur quatre sur les questions II 1 (normales et enveloppe des normales).
Le deuxième bloc, constitué de la partie III, est un exercice de géométrie « pure », davantage centré sur le programme de première année. Presque tous les candidats ont plus ou moins abordé cette partie avec plus ou moins de réussite.
Le dernier bloc, constitué de la quatrième partie, est un exercice d'algèbre linéaire. Il s'agit d'étudier un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ non diagonalisable dont le carré était diagonalisable sans avoir recours à une matrice.

Les résultats sont très contrastés. Si on rencontre peu de copies vides, on trouve par contre un nombre non négligeable de copies où seules une ou deux questions ont été traitées avec succès (en général I 1 et III 1 b). On trouve également de très bons candidats ayant traité avec succès la quasi-totalité du sujet. Les questions de cours ou d'application directe du cours sont trop souvent négligées. Les correcteurs ne peuvent que conseiller aux futurs candidats d'apprendre et de maîtriser leur cours.

La présentation des copies s'est nettement dégradée cette année. Si heureusement, on compte très peu de copies qui ressemblent à des torchons, par contre, moins d'un candidat sur deux $\boxed{\text{encadre}}$ les résultats de ses démonstrations, comme cela est demandé par l'énoncé... Pour cela, l'usage d'une règle est indispensable et il est conseillé d'utiliser une couleur différente de la couleur d'écriture. Comme l'an dernier, l'orthographe de certaines copies laisse à désirer. Il serait souhaitable que les noms propres (Pythagore et Chasles) soient écrits avec des majuscules et que des mots d'usage courant en mathématiques et dont la plupart figure dans l'énoncé soient correctement orthographiés et tout particulièrement : mathématiques, tangent(e), degré, développée et enveloppe, coordonnée(s), gradient ...

Côté rédaction, il est indispensable que les candidats définissent leurs notations : des fonctions dans la partie I, des vecteurs et droites dans la partie II, des points dans la partie III, des sous-espaces propres dans la partie IV... et qu'ils utilisent de préférence des noms non utilisés dans la suite de l'exercice et explicites : par exemple : P, Q, P_1 pour des polynômes plutôt que A ou x ; X et P' étant à exclure. Ils doivent également respecter les

notations de l'énoncé : par exemple, le point de la courbe Γ de paramètre t se note M_t et non $M(t)$ ou $A(t)$, et le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la partie III se note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et non $< \vec{u}, \vec{v} >$ ou encore moins $\vec{u} \times \vec{v}$.
Comme l'an dernier, les candidats sont invités à utiliser le théorème de Pythagore et la relation de Chasles et pas simplement Pythagore et Chasles. Ils éviteront également les abréviations et le style télégraphique.
On constate également de nombreuses confusion de vocabulaire et/ou de notions : Image et invariant(s), parallèles et colinéaires, diagonale et diamètre, cercle et disque, milieu et centre, bissectrice, médiatrice et médiane, degré, dimension et rang ... Par ailleurs de nombreux candidats ne semblent pas faire la différence entre AB (la longueur), $\overrightarrow{AB}$ (le vecteur), $[AB]$ (le segment) et (AB) (la droite) ...
De plus, un peu plus d'attention, vis-à-vis de la nature des objets qu'ils manipulent, devrait permettre aux candidats d'éviter de : dériver une surface ou une courbe, faire le produit vectoriel de deux vecteurs du plan, la somme d'un réel et d'un vecteur, d'écrire une équivalence ($\Leftrightarrow$) entre un ensemble ou une équation, qu'un endomorphisme contient un vecteur ou qu'il est non vide, que le centre d'un cercle est une longueur ou un vecteur ou que des ensembles de $\mathbb{R}^2$ sont des sphères, des plans ou ... des paraboloïdes.

Avant de passer au détail question par question, nous rappellons aux candidats qu'ils doivent se munir pour cette épreuve de leur matériel de géométrie : règle, compas, équerre...

Partie I

Question 1 : Presque tous les candidats savent comment faire cette question, même si elle n'est pas toujours bien rédigée.

Question 2 et 3 : Les candidats qui connaissent leur cours font ces deux questions sans problème ... exception faite des erreurs de calculs. Malheureusement, seul un candidat sur deux parvient à trouver le plan tangent et un sur quatre la tangente...
Les candidats peuvent (doivent) vérifier qu'ils n'ont pas fait d'erreur sur le calcul d'un produit vectoriel en s'assurant que le vecteur obtenu est bien orthogonal aux deux vecteurs de départ.
Une équation cartésienne d'un plan (de $\mathbb{R}^3$) est de la forme $ax+by+cz = d$, et inversement $ax + by + cz = d$ représente (dans $\mathbb{R}^3$) un plan même lorsque $c = 0$ (et $(a, b) \neq (0, 0)$).

Partie II

Questions 1 : Là encore, les candidats qui connaissent leur cours ont fait ces questions sans problème ... exception faite des (nombreuses) erreurs de calculs. Ne pas oublier de dire où est le paramètre t. Attention toutefois à ne pas confondre le rayon de courbure avec le rayon du cercle de courbure.
Les (futurs) candidats doivent faire attention sur la façon dont les questions (b) et (c) sont posées : les mentions « en déduire » et « utiliser ce résultat » imposent d'utiliser l'enveloppe des normales à la courbe pour trouver sa développée et d'utiliser la développée pour trouver le centre et le rayon du cercle de courbure. Attention : le rayon de courbure n'est pas égal à $\lambda(t)$ (pour reprendre la notation la plus utilisée) : le vecteur choisi pour diriger la normale n'est pas unitaire, il faudrait aussi vérifier s'il est convenablement orienté.

On a parfois l'impression que les candidats pensent qu'il n'existe qu'un seul vecteur (ou éventuellement deux en le normant) tangent à une courbe... Si u en est un, λu ($\lambda \neq 0$) en est un autre mais qui n'est pas égal au précédent (sauf si $\lambda = 1$).

Pour la question (b), un certain nombre de candidats ont, semble-t-il, confondu la recherche de la développée avec celle d'une représentation paramétrique de la surface réglée engendrée par les normales.
Manifestement, d'autres candidats savaient faire cette question mais n'y sont pas parvenus parce que les notations de l'exercice ne sont pas celles qu'ils ont dans leur cours : ils n'ont pas su quoi faire de u. Il est gênant pour de futurs ingénieurs de ne pas savoir s'adapter aux notations qui ne sont pas celles auxquelles ils sont habitués.

Question 2 (a) : Un petit dessin (repère où on place le point M_{-1}, le vecteur tangent associé, l'esquisse du cercle) aurait permis à nombre de candidats d'éviter de placer le centre du cercle sur la tangente à la courbe. Si on a bien $r > 0$, par contre, ce n'est pas le cas de $a + 1$, il ne faut donc pas oublier les valeurs absolues.

Question 2 (b) : Les équations de cercles semblent connues. Il faut faire attention à la formulation de la question.

Question 2 (c) : Cette question n'a pas été assez abordée au goût des correcteurs ... Le développement limité (en 0) de $h \mapsto \dfrac{1}{1-h}$ est bien connu, celui de $h \mapsto \dfrac{1}{(1-h)^2}$ a posé plus de problèmes ... mais presque moins que celui de $h \mapsto (1-h)^2$ ... La formule de Taylor-Young est une méthode efficace pour répondre à cette question.
Deux remarques : quand on pose $t = -1+h$, on n'a pas $x(t) = x(h)$ mais $x(t) = x(-1+h)$ et il ne faut pas développer les termes en $(1+t)^k$.

Question 2 (d) : Cette question n'a d'intérêt que si les questions précédentes ont été correctement traitées ...

Partie III

Il est possible de transformer tout ou partie de cet exercice en un exercice de géométrie analytique. Il suffit d'indiquer soigneusement le repère utilisé ainsi ses caractéristiques (repère qui peut varier d'une question à l'autre). Nombre de candidats l'ont fait, mais on ne sait presque jamais quel est le repère utilisé (on devine juste qu'il a pour origine le point O).
Pour cette partie, les illustrations graphiques sont les bienvenues. Elles ont bien aidé les correcteurs à suivre les démonstrations parfois tortueuses des candidats. Il est dommage que tous les candidats ne le fassent pas et étonnant que certains candidats puissent faire de la géométrie sans aucun dessin. Attention toutefois à ne pas choisir des cas particuliers (droite D passant par le point O).

Question 1 (a) : assez bien réussie. Il ne suffit pas de dire qu'un triangle soit inscrit dans un cercle pour qu'il soit rectangle. De plus, le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires n'est toujours égal au produit de leurs normes.

Question 1 (b) : les réponses sont souvent justes quoique pas toujours justifiées.

Question 1 (c) : il s'agit d'une question de cours pour (i) et le théorème de Pythagore règle la question (ii) en deux lignes.

Question 2 (a) : cette question a fait l'objet de nombreux ≪ passages en force ≫. Les correcteurs lisent la totalité des copies, il est donc inutile, voire dangereux, d'essayer de leur faire croire que l'on a fait la question alors que l'on a escamoté les termes qui gênaient ou quelques étapes que l'on ne sait pas faire ...

Question 2 (b) : (i) souvent bien faite.
(ii) la longueur ΩI_0 ne suffit pas à positionner le point I_0.
(iii) Beaucoup ont identifié une droite et même la droite passant par I_0 et orthogonale à (OO') sans se rendre compte qu'ils n'avaient qu'une inclusion. De rares copies ont étudié la réciproque.

Question 2 (c) : de nombreuses bonnes réponses ... rarement justifiée s... et régulièrement en contradiction avec la question précédente.

Question 2 (d) : il est étonnant de trouver des tracés (parfois justes) alors que la question (b) n'a pas été traitée ou des tracés incohérents avec la question (b).
On aurait aimé trouver systématiquement l'application numérique de la question (b) (ii).

Question 3 (a) : rarement traitée, jamais avec succès. Il s'agissait d'établir la réciproque que la question 1.

Question 3 (b) : (i) beaucoup de candidats ont compris qu'on leur demandait une identité de polarisation (même si certains lui donnent un autre nom) ; elle est juste dans un peu plus d'un cas sur deux. (ii) Il y a (au moins) deux façons de calculer $|z|^2$: $(\mathcal{R}e(z))^2+(\mathcal{I}m(z))^2$ choisie par la grande majorité des candidats, et $(z\overline{z})$ qui était plus efficace ici.

Question 3 (c) : La formulation de cette question, contrairement à la précédente, n'imposant pas de méthode, on peut chercher le centre et le rayon du cercle circonscrit à ABC (qui sont heureusement ≪ raisonnables ≫) puis vérifier que D est sur ce cercle. Ceux qui ont utilisé le résultat de la question 3 (a), ainsi que l'espéraient les auteurs du sujet, ont souvent oublié de vérifier l'alignement des points.

Partie IV

Cette partie est conçue pour être traitée sans avoir recours aux matrices, mais il est possible de les utiliser pour certaines questions à condition de préciser la base utilisée (on rappelle que tous les espaces vectoriels ne disposent pas d'une base canonique) et de rester en dimension quelconque.
Le théorème du rang a été très souvent malmené dans cette partie (questions 1b, 2b, c, e).

Question 1 (a) : L'inclusion des noyaux (et non pas des ≪ *ker* ≫) est souvent bien démontrée. Par contre la conséquence sur les valeurs propres est souvent fausse. Les (futurs) candidats peuvent vérifier, en utilisant par exemple, la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ que l'affirmation ≪ les valeurs propres de f^2 sont les carrés de celles de f ≫ est fausse. Il est étonnant de voir de nombreuses fois que ≪ f et f^2 ont les mêmes valeurs propres ≫.
Comme l'an dernier, on rappelle que $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$ mais que la réciproque est fausse en général.

Question 1 (b) : Cette question a été peu réussie ... un mélange aventureux du théorème du rang et de la formule de Grassmann a souvent transformé, on ne sait comment, des inégalités larges en strictes.

Question 1 (c) : Cette question n'a été que très peu abordée et encore moins réussie. Elle ne nécessite pourtant que la définition du polynôme caractéristique (avec un déterminant) et la propriété $\det(f)\ \det(g) = \det(f \circ g)$ (et non $\det(f\,g)$).
On rappelle que dans $\mathbb{R}$, tous les polynômes ne sont pas scindés. De plus, la question (a) ne donne aucune information quant à la multiplicité des valeurs propres de f^2.

Question 2 (a) : Nombre de candidats n'en démontre que la moitié ... pas toujours la même .. sans même souvent mentionner l'autre moitié.
Pour la linéarité : on conseille aux candidats de la démontrer soigneusement, 3 égalités sont en général suffisantes, à condition de ne pas oublier de préciser dans quel(s) ensemble(s) se trouvent les objets manipulés. Cela est bien plus rentable que des formulations toutes faites qui sont au mieux douteuses (≪ par linéarité de la somme et du produit ≫ : $P \mapsto P+1$ et $P \mapsto P \times P$ ne sont pas linéaires), au pire complètement fausses (≪ par linéarité des polynômes ≫). Il est inutile de démontrer que $f(0) = 0$.
Pour $f(E) \subset E$: C'est ici que $n \geqslant 3$ est utilisé. On a uniquement $\deg(f(P)) \leqslant 3$ ... On rappelle que $\deg(0) = -\infty$, $P \in \mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow \deg(P) \leqslant n$, et que le produit de deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas toujours un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Question 2 (b) : ≪ La ≫ méthode d'obtention du noyau est bien connue. Beaucoup arrivent à $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$ et sans doute emportés par leurs habitudes sur les produits scalaires, en déduisent que $P = 0$. On trouve trop souvent ≪ $\ker(f) = 0$ donc $\dim(\ker(f)) = 1$ ≫.

L'image se limite souvent à $\{P \in E\,;\, \exists\, Q \in E, f(Q) = P\}$. La caractérisation à l'aide des images d'une base est peu utilisée ; elle mène pourtant facilement au résultat.
Attention : l'image et le noyau de f ne contiennent que des polynômes, pas de vecteurs colonnes. On rappelle que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ et on signale que le théorème du rang aurait dû permettre de déceler quelques erreurs.

Question 2 (c) (d) : il s'agit de questions de cours. L'injectivité est mieux maîtrisée que la surjectivité. Il ne suffit pas de dire que f est un endomorphisme pour affirmer ≪ f injective $\Leftrightarrow$ f surjective ≫. On trouve beaucoup trop souvent : ≪ $f(0) = 0$ donc 0 est valeur propre de f ≫ et ≪ la multiplicité de la valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre ≫.

Question 2 (e) : Question réussie par presque tous les candidats l'ayant abordée.

Question 2 (f) (g) (h) : ces questions font la synthèse de toutes les questions précédentes. On trouve quelques très bonnes réponses, ce qui prouve qu'il y a, heureusement, des candidats pour lesquels l'algèbre linéaire ne se limite pas à diagonaliser des matrices 3×3.

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

099

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Tournez la page S.V.P.

Les trois parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\,\vec{j})$, on considère le point A de coordonnées $(a,\,b)$, où $(a,b)\,\in\,\mathbb{R}^2$.
À chaque point A du plan, on associe la courbe Γ_A ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=t^3+3t^2-at \\ y(t)=t^3-3t^2-bt \end{array}\right. \quad , \quad t\in\mathbb{R}$$

1. **Étude de Γ_A dans le cas où $a=b=9$.**
   (a) Montrer que Γ_A possède un axe de symétrie que l'on précisera. On étudiera donc x et y sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Étudier les variations de x et de y ; on consignera les résultats dans un tableau de variations en précisant les tangentes verticales, horizontales et la tangente au point de paramètre 0.
   (c) Montrer que Γ_A possède un point double que l'on précisera. Déterminer l'angle formé par les deux tangentes à Γ_A au point double.
   (d) Etudier la branche infinie de la restriction de Γ_A à $\mathbb{R}^+$.
   (e) Tracer Γ_A.
2. Calculer l'aire de la boucle formée par Γ_A.
3. **On revient au cas général.**
   (a) Montrer que la courbe Γ_A possède un point stationnaire si et seulement si A appartient à une courbe $\mathcal{P}$ dont on donnera une équation.
   (b) Montrer que $\mathcal{P}$ est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques. Tracer $\mathcal{P}$.

Partie II

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de $\mathbb{R}^3$, et A, B, C trois points non alignés de ce plan. On suppose que le triangle ABC est direct, et n'a que des angles aigus. On note :

$$a=BC \quad , \quad b=AC \quad , \quad c=AB$$

On désigne par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), et on note $h=AH$.
$\widehat{A}$ désigne l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, $\widehat{B}$ l'angle géométrique $\widehat{CBA}$, et $\widehat{C}$ l'angle géométrique $\widehat{ACB}$.

Pour cet exercice, le tracé d'un dessin sur la copie sera apprécié.

1. Donner la relation entre $\sin\widehat{C}$, h et b.
2. Rappeler la formule donnant l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC en fonction de a et h.
3. Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de a, b et $\sin\widehat{C}$.

4. Montrer que : $\dfrac{\sin \widehat{C}}{c} = \dfrac{\sin \widehat{B}}{b} = \dfrac{\sin \widehat{A}}{a}$.
5. Comparer $\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH}\right\|$ et $\det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right)$. Donner une interprétation en termes d'aires du résultat obtenu.
6. Exprimer AB^2 en fonction de a, b et $\cos \widehat{C}$.
7. Retrouver le résultat de la question 6. à l'aide du théorème de Pythagore.

Partie III

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Id_E désigne l'application identité de E.

1. (a) Montrer que $\dim \mathrm{Im} f - \dim \mathrm{Im} f^2 = \dim \ker f \cap \mathrm{Im} f$.
   (on pourra considérer la restriction de f à $\mathrm{Im} f$: $\mathrm{Im} f \to E$, $x \mapsto f(x)$).
   (b) Montrer que $\dim \ker f^2 - \dim \ker f = \dim \mathrm{Im} f - \dim \mathrm{Im} f^2$.
   (c) En déduire que $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f$ si et seulement si $\ker f^2 = \ker f$.
   (d) Montrer que $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f$ si et seulement si $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.
2. On suppose désormais que $f^3 = Id_E$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f - Id_E) \subset \ker(f^2 + f + Id_E)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f - Id_E) \cap \ker(f - Id_E) = \{0\}$.
   (c) Montrer que $E = \ker(f^2 + f + Id_E) \oplus \ker(f - Id_E)$.
   (d) On suppose qu'il existe un vecteur non nul x dans $\mathrm{Im}(f - Id_E)$. Montrer que $f(x)$ appartient à $\mathrm{Im}(f - Id_E)$ et que la famille $(x,\ f(x))$ est libre.
3. On suppose que $\dim E = 3$, $f \neq \mathrm{Id}_E$, et $f^3 = \mathrm{Id}_E$.
   (a) Démontrer que $\dim \ker(f - \mathrm{Id}_E) = 1$.
   (b) f est-elle diagonalisable ?
   (c) Donner un exemple de tel endomorphisme f (on pourra donner sa matrice dans la base canonique).

La partie II mêle de la géométrie élémentaire du plan et de la géométrie vectorielle. Les dernières questions permettent d'obtenir le théorème d'Al-Kashi, ou « loi des cosinus », qui relie, dans un triangle la longueur d'un côté à celles des deux autres et au cosinus de l'angle formé par ces deux côtés, et généralise le théorème de Pythagore aux triangles non rectangles.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques B

Nous avons les remarques générales suivantes :

1. Une majorité de candidats ne semble pas comprendre la différence entre l'équation d'une courbe, et son paramétrage.

2. Le niveau d'un tiers des candidats en algèbre linéaire est très faible (nombreux sont les candidats n'ayant même pas abordé la partie d'algèbre). Les espaces vectoriels sont assimilés à des ensembles, la différence entre un espace et sa dimension n'est pas perçue.

3. Dans de nombreuses copies (de 30 à 50 %), les résultats ne sont pas encadrés, alors que cela est demandé sur l'énoncé, sans parler de ceux que le font mais à main levée, et peu proprement. Nous rappelons que cela facilite non seulement la tâche du correcteur mais, aussi, aide le candidat à retrouver facilement ses propres résultats.

4. On rencontre quelques copies à l'orthographe déplorable. Au palmarès des mots mal orthographiés, et pourtant fréquemment utilisés en mathématiques : tangente, aire, mathématiques, horizontale, intervalle, degré, projeté, parabole, ... ce qui est d'autant moins acceptable que la plupart d'entre eux figurent dans l'énoncé. Signalons également que Pythagore, comme tous les noms propres, s'écrit avec une majuscule. Enfin, nombreux sont ceux qui utilisent ≪ Pythagore ≫ au lieu du ≪ théorème de Pythagore ≫.

Remarques particulières

Partie I

1. **Étude de Γ_A dans le cas où $a = b = 9$.**
   (a) En général, cette question est bien réussie, même si on ne sait pas où est « t ». De nombreux candidats ont eu la bonne idée d'illustrer cette question par un schéma.

   (b) Cette question a aussi été bien réussie. Quelques candidats oublient le coefficient dominant lorsqu'ils factorisent $x'(t)$ et $y'(t)$. D'autres oublient la seconde partie de la question. La tangente au point de paramètre zéro n'est pas toujours bien précisée.
   Pour trouver les racines d'un polynôme de degré deux ayant une racine évident, le passage au discriminant est systématique. Certaines racines de 144 sont restées en l'état.

   (c) Certains candidats pensent que tout point de l'intersection de la courbe avec son axe de symétrie est un point double ; d'autres, que les points doubles sont nécessairement sur l'axe. La résolution du système est souvent mal rédigée (surtout les équivalences). Comme précédemment, des candidats oublient la seconde partie de la question.

   (d) La notion de branche parabolique est mal connue et, lorsque le résultat est établi, la traduction graphique nest pas maîtrisée. Les calculs sont en général corrects, mais leur traduction hasardeuse.

   (e) Le tracé de la courbe Γ_A ne correspond pas toujours à une traduction correcte des calculs précédents ... Nombreux sont les candidats qui ont mal choisi l'unité et/ou la position de l'origine du repère, ce qui ne leur permet pas de tracer les branches infinies. On trouve quelques copies où le repère n'est pas orthonormé et/ou il n'y a aucune indication d'unité.

2. Très peu de candidats ont obtenu le résultat concernant l'aire de la boucle formée par Γ_A. Beaucoup de copies donnent un résultat non simplifié.

   Quelques candidats trouvent une aire négative ou nulle sans que cela semble les troubler. On trouve inversement des vérifications de la valeur trouvée par le calcul de l'aire d'un rectangle contenant la boucle.

   Parmi les mauvaises formules, on trouve celles donnant le calcul de la longueur.

3. Cette question a rarement été abordée. Parmi les candidats connaissant la formule, un certain nombre ont voulu exploiter la symétrie du domaine, mais ont :
   - ◇ oublié de considérer la circulation sur le segment $[M(0)M(\pm 3)]$;
   - ◇ ou utilisé $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{3} f(t)\,dt$.

   (a) Cette question a davantage été traitée que la précédente. De nombreux candidats s'arrêtent à une représentation paramétrique. Certains le disent et cherchent l'équation dans *b.* mais d'autres pensent qu'il s'agit de l'équation.

   (b) Cette question a rarement été faite. Pour la nature : ceux qui utilisent des outils de première année (rotation du repère) n'arrivent pas à le traduire sur le dessin (axe focal mal placé). Ceux qui utilisent les outils de seconde année s'en sortent mieux, même si certains oublient de normer les vecteurs propres. Les éléments caractéristiques se limitent souvent au paramètre et au sommet (qui devient d'ailleurs « centre » dans de nombreux cas).

Partie II

C'est la partie la mieux réussie, qui a contribué à sauver de nombreuses copies, et leur permettre d'atteindre une note correcte. Il y même de rares candidats n'ayant traité que cette partie. Presque tous font le tracé du triangle mais, dans un cas sur deux, le triangle est mal orienté. On rencontre quelques angles obtus (souvent en A ou C, mais aussi parfois en B).

1. Tous les candidats ont donné la bonne réponse, MAIS seul un sur deux précise le triangle rectangle considéré et nombreux sont ceux qui ne précisent pas la position de l'angle droit.

2. On trouve quelques réponses qui donnent $a \times h$, $\dfrac{a \times h}{3}$, ou encore $\dfrac{a \times h^2}{2}$ mais, au final, 97 % de réponses correctes.

3. A quelques exceptions près, les réponses sont cohérentes avec les précédentes.

4. Cette question a été bien réussie (on trouve trois méthodes différentes plus ou moins efficaces).

5. La norme du produit vectoriel est souvent bien calculée (même s'il semble y avoir une part de chance). Pour le déterminant, bien peu ont remarqué que la base du plan proposée était indirecte, les rares qui ont eu un résultat négatif ont cru à une erreur. Beaucoup se souviennent qu'il y a un lien entre le déterminant et une aire mais presque tous oublient les valeurs absolues. Certains candidats souhaitent utiliser des

coordonnées mais quasiment aucun ne précise le repère orthonormé direct utilisé. On trouve des déterminants de deux vecteurs à trois coordonnées et des produits vectoriels de deux vecteurs à deux coordonnées.

6. L'identité de polarisation a été utilisée assez souvent. On trouve souvent des variantes plus ou moins cachées et/ou compliquées de la démonstration de la question suivante.
   Il est à noter que l'utilisation des résultats du programme de seconde année et non de première année permettait d'obtenir la réponse la plus efficace.

7. Cette question a été assez bien réussie (avec plus ou moins d'efficacité).

Partie III

Cette partie n'est pas abordée par 10 % des candidats. Beaucoup de candidats n'obtiennent aucun point dans cette partie. Le théorème du rang, peu souvent utilisé, est fréquemment confondu avec la formule de Grassmann, ou, encore, avec une décomposition de la forme « $E = \mathcal{I}mf + \ker f$ ». De nombreux candidats semblent penser que ce théorème ne s'applique qu'à des endomorphismes. Les hypothèses sont rarement rappelées (de très nombreuses copies se contentent de dire que le théorème s'applique car f est un endomorphisme).

1. (a) Il y a eu très de bonnes réponses à cette question.

   (b) Cette question est encore moins bien réussie que la précédente.

   (c) De nombreux candidats font le lien avec le *b.*, mais beaucoup pensent que « $\dim F = \dim G$ » équivaut à « $F = G$ ».

   (d) Les candidats sont moins nombreux à faire le lien avec le *a.* (la question semble trop loin pour être utilisée ...) La somme directe $E = F \oplus G$ se limite parfois à $F \cap G = \{0\}$ (ou « 0 », ou « $\emptyset$ », ou « $\{\emptyset\}$ »). Régulièrement, on rencontre des copies où seule une implication est démontrée.

2. De nombreux candidats écrivent, sans justification, que « $f(x) = y$ » équivaut à « $f^2(x) = f(y)$ ».

   (a) Cette question semble la mieux réussie de la partie III. La notion d'image apparaît comme correctement maîtrisée.

   (b) Les réponses, en général, manquent d'efficacité (une fois sur deux, le candidat n'utilise pas le résultat précédent).

(c) On trouve souvent « $A \subset B$ et $A \cap C = \{0\}$ donc $B \cap C = \{0\}$ ».

(d) L'appartenance $f(x) \in \mathcal{I}m\ (f - Id_E)$ est assez bien traitée. Peu de candidats réussissent à montrer que la famille $(x, f(x))$ est libre.

3. (a) Il y a peu de bonnes réponses Quelques copies n'étaient pas loin d'arriver au résultat.

   (b) De même que précédemment, il y a peu de bonnes réponses, et quelques copies qui n'étaient pas loin d'arriver au résultat (ce ne sont pas forcémment les mêmes qu'en a). Certains candidats font appel aux valeurs propres complexes de f. Comme dim ker $(f - Id_E) = 1$, peu envisagent la possibilité que 1 soit valeur propre triple (ou double).

   (c) L'exemple proposé vérifie toujours dim ker $(f - Id_E) = 1$ mais pas, dans un cas sur deux, $f^3 = Id_E$. Il est à noter que l'utilisation des résultats du programme de seconde année et non de première année permettait d'obtenir la réponse la plus efficace.

Banque PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Partie I

1. Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, on considère les points $I(1,\,0)$, $J(0,\,1)$.

   (a) Soit $M(x,\,y)$ un point du plan. Donner l'expression de la distance $d\,(M;(OI))$ du point M à la droite (OI), puis de la distance $d\,(M;(OJ))$ du point M à la droite (OJ), et, enfin, de la distance $d\,(M;(IJ))$ du point M à la droite (IJ).

   Dans ce qui suit, on désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x,\,y)$ du plan tels que la somme des carrés des distances du point M aux trois côtés du triangle OIJ soit égale à $\frac{1}{3}$.

   (b) Former une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

   (c) Donner une équation réduite de $\mathcal{C}$, et préciser sa nature et son excentricité.

   (d) Montrer que $\mathcal{C}$ est tangente aux droites (OI) et (OJ).

2. Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, on considère les ellipses $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ d'équations respectives

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1,$$

   où a et b désignent deux réels strictement positifs.

   On considère la représentation paramétrique de $\mathcal{E}$:

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$$

   et les points N et P de paramètres respectifs t et θ.

   (a) Déterminer une relation entre t et θ exprimant que la tangente à $\mathcal{E}$ en P est parallèle à la droite (ON).

   (b) La condition précédente étant vérifiée, déterminer l'aire du triangle NOP.

   (c) On considère la droite Δ d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma=0$.
   Montrer que Δ est tangente à $\mathcal{E}$ si, et seulement si,

$$a^2\alpha^2+b^2\beta^2-\gamma^2=0 \quad \text{et} \quad \gamma\neq 0.$$

   (d) On désigne par u et v deux réels, soient $U(2a\cos u,\,2b\sin u)$ et $V(2a\cos v,\,2b\sin v)$ deux points distincts de l'ellipse $\mathcal{E}'$.
   Déterminer la relation que doivent vérifier u et v pour que la droite (UV) soit tangente à l'ellipse $\mathcal{E}$.

   (e) Soient A, B et C trois points distincts de $\mathcal{E}'$ tels que (AB) et (AC) soient tangentes à $\mathcal{E}$.
   Montrer que (BC) est tangente à $\mathcal{E}$.

3. Les points P et Q décrivent respectivement l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées tout en vérifiant l'égalité $PQ = a + b$, on considère le point M du segment $[PQ]$ tel que $MP = b$ et $MQ = a$.

   i. Rappeler la définition d'une affinité orthogonale.

   ii. Dans le cas où $a = 5$ et $b = 3$, représenter sur une figure les points M, P et Q (l'unité de longueur est 1 centimètre).

   iii. Quel est l'ensemble $(\mathcal{E})$ du plan décrit par le point M ?

Partie II

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j}\,;\vec{k})$, on considère les droites D et D' d'équations respectives

$$\begin{cases} y = 0 \\ 4z = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 0 \\ 4z = 1 \end{cases}.$$

On désigne par $\mathcal{P}$ la surface d'équation

$$z = x^2 - y^2.$$

1. Déterminer la nature des courbes obtenues en coupant $\mathcal{P}$ successivement par les plans d'équations $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et $z = 1$.
2. Déterminer la nature de $\mathcal{P}$.
3. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathcal{P}$. Combien y-a-t-il de droites passant par M_0 entièrement incluses dans $\mathcal{P}$? On donnera un vecteur directeur de chacune de ces droites.
4. Quel est l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ par lesquels passent deux droites orthogonales et incluses dans $\mathcal{P}$?
5. Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points de l'espace équidistants des droites D et D'.

Partie III

n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$, à coefficients réels, et par I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note tr l'application qui, à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa trace, c'est-à-dire la somme de ses éléments diagonaux.

1. Montrer que tr est une application linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(\mathrm{tr})$. En déduire la dimension de $\ker(\mathrm{tr})$.
3. Montrer que l'on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{vect}(I_n) \oplus \ker(\mathrm{tr})$.
4. Établir que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 : \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

5. Déterminer, s'il en existe, des matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.
6. J désigne une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit Ψ_J l'application qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe

$$\Psi_J(M) = M + \operatorname{tr}(M)J.$$

   (a) Montrer que Ψ_J est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Dans le cas où $J = I_n$, déterminer les valeurs propres de Ψ_{I_n}.
   Ψ_{I_n} est-il diagonalisable ?
   (c) On revient au cas général, simplifier $(\Psi_J)^2 - 2\Psi_J + Id$ où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (d) Quelles sont les valeurs propres de Ψ_J ?
   (e) Ψ_J est-il diagonalisable ?

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques B

L'épreuve de mathématiques B portait principalement sur le programme de géométrie de première année et de seconde année des classes préparatoires PTSI et PT. Il était aussi proposé aux candidats un exercice d'algèbre linéaire.

Le problème abordait de nombreuses questions classiques de géométrie : intersections, distances, droites, coniques, tangentes, quadriques, plans. Elles étaient donc à la portée de tous les candidats. A toutes fins utiles, nous rappelons que les résultats de cours doivent être connus, ce qui n'est que rarement le cas.

Le soin apporté à la rédaction de ces questions n'est pas un luxe inutile. Les réponses doivent être un moyen d'impressionner favorablement le correcteur par la précision et la clarté des arguments utilisés. Il faut cependant veiller à ne pas délayer les réponses aux questions élémentaires. La concision peut concourir à la clarté.

Les candidats éprouvent des difficultés à mener les calculs jusqu'au bout, en particulier la manipulation des paramètres n'est pas maîtrisée. De même, nous déplorons l'incapacité des candidats à enchaîner les calculs même simples.

Comme ce qui est dit concernant l'épreuve de Mathématiques A, nous ne redirons jamais assez l'importance de mener à bien des calculs. Les mathématiques commencent par du calcul. L'expérience montre que ceux qui savent mener correctement à bien des calculs sont beaucoup plus à l'aise, ensuite, avec l'abstraction.
Les candidats seront régulièrement testés sur ces capacités.

Une question de géométrie « pure » était posée en fin de partie A, elle n'a été abordée sérieusement que par 12 candidats. Un tiers des candidats se contentent de regarder la figure et semblent croire que l'observation tient lieu de démonstration. Ce constat est inquiétant s'agissant de futurs ingénieurs scientifiques. Il semble important de rappeler qu'affirmer ou dessiner n'est pas démontrer.
Ce type d'erreur sera désormais sanctionné.

Il a été tenu le plus grand compte du soin apporté à la présentation des copies. Les candidats qui n'encadrent pas les résultats comme ceux qui utilisent une encre presque invisible ont été très sévèrement sanctionnés.

Partie A

1. Les questions (a) et (b) ont été globalement bien traitées même si de nombreux candidats oublient la valeur absolue dans la formule de la distance d'un point à une droite. Les questions (c) et (d) ont posé plus de problèmes.
2. Ces questions n'ont été abordées que par un quart cent des candidats. Les conditions analytiques de colinéarité et la formule de l'aire d'un triangle ne sont connues que de très peu de candidats.
3. Confer remarques précédentes.

Partie B

1. Bien traité.
2. Bien traité.
3. Très peu abordée.
4. Très peu abordée.
5. 10 pour cent des candidats seulement ont réussi à traiter cette question.

Partie C

1. Beaucoup de candidats se contentent d'une simple affirmation.
2. Une dizaine de candidats pensent à vérifier que la trace n'est pas l'application nulle.
3. Assez bien traité. Rédaction souvent indigeste.
4. Idem.
5. Idem.

La suite n'est abordée que par un nombre très faible de candidats.

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Le sujet comporte un problème en deux parties et un exercice indépendants

Tournez la page S.V.P.

PROBLÈME

Partie I

Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$, on considère la conique $\mathcal{E}_p$ d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2pxy + 2(py - x) = 0, \quad p \text{ désigne un réel.}$$

On désigne par P le point de coordonnées $(0,\,\alpha)$ avec α réel non nul et par Q le point de coordonnées $(0,\,2\alpha)$.

1. Dans cette question, on suppose $p = 0$.
   (a) Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de $\mathcal{E}_0$.
   (b) Former les équations des tangentes à $\mathcal{E}_0$ menées par P. On désigne par (D) la tangente non verticale.
   (c) Former les équations des tangentes à $\mathcal{E}_0$ menées par Q. On désigne par (D') la tangente non verticale.
   (d) Déterminer les coordonnées du point R, intersection des droites (D) et (D').
   (e) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points R lorsque α décrit $\mathbb{R}^\star$. Déterminer la nature de $\mathcal{P}$.
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel p, la nature de $\mathcal{E}_p$.
3. Donner les vecteurs directeurs des axes ainsi que le centre ω_p, lorsqu'il existe, de $\mathcal{E}_p$.

Partie II

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$, on considère les points $A(0,\,0,\,1)$ et $B(1,\,1,\,2)$. On désigne par Δ_1 la droite (AB) ; par Δ_2 la droite d'équations $y = z = 0$; par Δ_3 la droite d'équations $x + y = 0,\ y + z = -1$; Δ_4 la droite d'équations $x - z = 2,\ y - 2z = 1$; par Δ_5 la droite d'équations $x = y = z$.

1. Donner une représentation paramétrique de Δ_1.
2. On considère le point M_1 de Δ_1 d'abscisse a et le point M_2 de Δ_2 d'abscisse b ; donner une représentation paramétrique de la droite (M_1M_2).
3. A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur a et b la droite (M_1M_2) a-t-elle une intersection non vide avec Δ_3 ?
4. On suppose dans cette question que la droite (M_1M_2) a une intersection non vide avec Δ_3. Donner une représentation paramétrique de (M_1M_2), on veillera à ce que le paramètre a n'apparaisse plus.
5. Soit une droite Δ' qui rencontre les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 ; montrer qu'elle est incluse dans la quadrique $\mathcal{Q}$ d'équation $xz = y(y+1)$.
6. Déterminer la nature de cette quadrique dont le centre a pour coordonnées $\left(0,\,-\frac{1}{2},\,0\right)$.
7. Vérifier que les droites Δ_4 et Δ_5 ne sont pas coplanaires.
8. Donner un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune aux droites Δ_4 et Δ_5.

9. On désigne par $\mathcal{S}$ la surface de révolution engendrée par la rotation de la droite Δ_4 autour de la droite Δ_5.
   (a) Donner une équation de la surface $\mathcal{S}$.
   On écrira cette équation sous la forme $\varphi(x,\, y,\, z) = 0$.
   (b) Les coordonnées $(x_\Omega,\, y_\Omega,\, z_\Omega)$ du centre Ω de cette surface sont les solutions du système :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\, y,\, z) = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,\, y,\, z) = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(x,\, y,\, z) = 0 \end{cases}.$$
   Déterminer les coordonnées de Ω.
   (c) Donner une équation réduite de la surface $\mathcal{S}$ dans le repère $(\Omega\,;\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$.
   En déduire la nature de $\mathcal{S}$.

EXERCICE

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. On dit qu'un endomorphisme u de E est cyclique si, et seulement s'il existe un vecteur x de E tel que
$$E = \mathrm{Vect}(x,\, u(x),\, u^2(x),\, u^3(x), \cdots) = \mathrm{Vect}(u^k(x),\, k \in \mathbb{N}).$$
On rappelle que $u^0 = Id_E$ et que, pour tout entier k strictement positif $u^k = u \circ u^{k-1}$.

1. Dans cette question, $n = 2$. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base canonique de E est
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que f est cyclique.
   (b) Déterminer les valeurs propres de f.
   (c) Donner une base de E dans laquelle f a une matrice diagonale.
2. Dans cette question, $n = 3$. On considère l'endomorphisme g de E dont la matrice dans la base canonique de E est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que g est cyclique.
   (b) Déterminer les valeurs propres de g.
   (c) Donner une base de E dans laquelle g a une matrice triangulaire supérieure.
3. On se replace dans le cas où n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2. On considère un endomorphisme h de E ayant n valeurs propres distinctes $\lambda_1,\, \lambda_2, \cdots,\, \lambda_n$, associées respectivement aux vecteurs propres $x_1,\, x_2, \cdots,\, x_n$; à l'aide du vecteur $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, montrer que h est cyclique.

♦

EPREUVE DE MATHEMATIQUES B

♦

I. REMARQUES GENERALES

Le problème mettait en jeu diverses notions du programme des classes préparatoires PTSI et PT : géométrie plane, coniques, géométrie dans l'espace, perpendiculaire commune, quadriques. L'exercice portait sur les endomorphismes cycliques.
Les trois parties étaient indépendantes et l'on pouvait aborder sans difficultés l'une d'elles sans avoir fait les précédentes.
La plupart des questions restaient à un niveau très abordable. Elles devaient permettre à tous les candidats de répondre à de nombreuses questions.

Les correcteurs ont apprécié le soin porté par les candidats à la présentation de leur copie.
Les candidats ont dans l'ensemble correctement traité l'algèbre linéaire, les techniques de base sont maîtrisées ; il en est de même pour la géométrie dans l'espace, on note de réels progrès sur la réduction des quadriques. Par contre, la géométrie plane n'a pas été traitée correctement, on rappelle aux candidats que refaire les sujets des années passées peut permettre de s'entraîner efficacement ; la détermination des tangentes à un cercle aurait ainsi été mieux réussie.

La plupart des candidats est parvenu a traiter le sujet de façon satisfaisante et certains sont d'ailleurs parvenus à traiter correctement la quasi totalité du problème.

II. REMARQUES PARTICULIERES

Partie A

1. Assez bien traitée (25%).
2. Des confusions.
3. Mal traitée.

Partie B

1. Très bien traitée par la plupart des candidats.
2. Très bien traitée par la plupart des candidats.
3. Assez bien traitée (30%)
4. Cf. question B3.
5. Cf. question B3.
6. Très bien traitée.
7. Très décevant.

8. Très peu traitée (10%)
9. Rarement abordée.

Partie C

1. Très bien.
2. Très bien.
3. Assez bien traitée. (20%)

III. CONCLUSION

Globalement, cette épreuve a permis d’assurer une bonne sélection des candidats, dont un nombre significatif obtient des résultats parfaitement honorables. De plus, les correcteurs ont eu la satisfaction de corriger un nombre significatif de bonnes copies, et parfois d'excellentes, ayant remarquablement traité la totalité du problème.

Nous rappelons aux futurs candidats les conseils suivants :

1. Une bonne connaissance de la terminologie et des théorèmes de cours est indispensable. Les définitions et théorèmes doivent être donnés de façon précise.
2. L'utilisation d'un théorème nécessite le rappel de celui-ci (en ne se contentant pas de le nommer) et la vérification des hypothèses au moment de l'utilisation.
3. La rédaction doit être à la fois précise et concise, proportionnée à la difficulté des questions, en insistant sur les points clés. Les raisonnements trop longs et incompréhensibles doivent être bannis.
   Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.
4. La présentation matérielle ne doit pas être négligée. Les copies illisibles ne passent pas au bénéfice du doute.
5. La qualité du français et de l'orthographe est à surveiller. C'est un point de grande importance dans la vie professionnelle d'un ingénieur, appelé à rédiger des rapports scientifiques et techniques.
6. Il faut maîtriser les techniques basiques de calcul.
7. A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les théorèmes du cours et les résultats antérieurs utilisés (avec les numéros des questions correspondantes). Il faut éviter de « court-circuiter » la moindre étape. En aucun cas, le correcteur ne peut attribuer de points s'il n'a pas la certitude absolue que la réponse donnée est parfaitement correcte, d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser les candidats qui ont pris le temps de bien rédiger.
8. Nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche, toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle, doivent être bannis.

Les candidats ayant mis en pratique ces conseils ont obtenu des notes bien supérieures à la moyenne.

Nous espérons que ces remarques aideront les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours. La prise en compte de ces conseils tout au long de l'année de préparation leur permettra d'être fin prêts le jour du concours.

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Partie I

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On note Γ la surface d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{3}(z-2)^2.$$

1. Déterminer la nature de la surface Γ. On précisera les éléments caractéristiques de cette surface.
2. Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à Γ au point de coordonnées $(1, \sqrt{2}, 5)$.
3. Déterminer l'équation cartésienne de la courbe obtenue par l'intersection d'un plan parallèle au plan Oxy avec la surface Γ.
   Quelle est la nature de cette courbe ?

4. (a) Déterminer la nature de l'intersection de la surface Γ avec le plan d'équation $x = 0$.
   (b) Déterminer la nature de l'intersection de la surface Γ avec le plan d'équation $x = k$, où k est un réel non nul fixé.
   (c) Déterminer la nature de l'intersection de la surface Γ avec un plan parallèle à l'axe Oz.
5. Déterminer la nature de l'intersection de la surface Γ avec un plan contenant le point de coordonnées $(0, 0, 2)$.

Partie II

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère la courbe $\mathcal{H}$ d'équations

$$\begin{cases} x = 1 \\ y^2 - z^2 = 4 \end{cases}.$$

1. Quelle est la nature de $\mathcal{H}$?
2. Montrer que la surface $\mathcal{S}$, engendrée par les droites D, assujetties à rencontrer l'axe $(O\,;\ \vec{k})$ et la courbe $\mathcal{H}$, tout en restant parallèles au plan $(O\,;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, a pour équation

$$y^2 = x^2(z^2 + \beta^2),$$

   où β est un réel que l'on déterminera.

   Les candidats qui n'ont pas trouvé la valeur de β sont invités à composer en gardant β comme paramètre.

3. Donner une équation de la section de $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $x = b$, où b désigne un réel.
   En déduire la nature de cette section ainsi que le lieu de ses sommets et de ses foyers.
   On étudiera à part le cas particulier du plan d'équation $x = 0$.
4. Donner une équation de la section $\mathcal{S}_0$ de $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $y = c$, où c désigne un réel.
5. On paramètre $\mathcal{S}_0$ par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{c}{2} \times \cos t \\ y(t) = c \\ z(t) = 2\tan t \end{cases} \qquad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[.$$

   On définit la courbure en un point de $\mathcal{S}_0$ de paramètre t par :

$$\Delta(t) = x'(t)z''(t) - x''(t)z'(t).$$

   Les points d'inflexion de $\mathcal{S}_0$ sont les points de paramètre t en lesquels la courbure s'annule en changeant de signe.
   Déterminer la courbure au point de paramètre t.
   En déduire le lieu des points d'inflexion de $\mathcal{S}_0$. On étudiera à part le cas particulier du plan d'équation $y = 0$.

Partie III

Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\overrightarrow{e_1},\,\overrightarrow{e_2})$. On donne les points $F(1,\,0)$ et $A(1,\,-2)$. Soit $\mathcal{P}$ la parabole passant par A, de foyer F et de sommet O. Tout point de $\mathcal{P}$ est repéré par son ordonnée $2t$, où t désigne un réel variable.

1. Former une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
2. Soit M le point de $\mathcal{P}$, d'ordonnée $2t$, former une équation de la tangente en M à $\mathcal{P}$. Donner une équation de la perpendiculaire à cette tangente, menée par A. Déterminer les coordonnées du point d'intersection N de ces deux droites.
3. Etudier et tracer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points N, lorsque M décrit $\mathcal{P}$, c'est-à-dire lorsque t décrit $\mathbb{R}$. On dressera le tableau des variations des coordonnées de N, on précisera les branches infinies ainsi que le vecteur directeur de la tangente à $\mathcal{E}$ au point A.
4. On considère trois points de $\mathcal{E}$ correspondant aux valeurs t_1, t_2 et t_3 du paramètre réel t. Montrer que ces trois points sont alignés si, et seulement si

$$t_1t_2t_3 - (t_1 + t_2 + t_3) = \alpha,$$

   où α est un réel dont on donnera la valeur.
5. Soit N_0 le point de $\mathcal{E}$ correspondant à la valeur t_0 de t ; la tangente à $\mathcal{E}$ en N_0 recoupe $\mathcal{E}$ au point K, correspondant à la valeur θ de t. Exprimer θ en fonction de t_0.
6. Le point K est appelé tangentiel du point N_0. Montrer que si trois points de $\mathcal{E}$ sont alignés, alors leurs tangentiels sont alignés.
7. Quel est le tangentiel du point correspondant à $t = 1$?
8. Un point peut-il être confondu avec son tangentiel ?

FIN DE L'EPREUVE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES B

Durée : 4 heures

REMARQUES GENERALES

Avant d'entrer dans les détails, précisons que les rapports sont répétitifs à force de souligner à l'envi les manques et les carences des candidats qui ont réalisé les moins bonnes prestations. On ne le répètera jamais assez : les chances de réussite au concours sont antinomiques avec l'amateurisme et l'impréparation. Il faut prendre conscience de ses manques et chercher méthodiquement à y remédier. Il faut également, tout au long des deux années de préparation, travailler TOUT le programme de géométrie, donc être méthodique, persévérant et… optimiste.

Comme tous les ans, nous ne cessons d'inviter les candidats à acquérir les techniques et la méthodologie spécifiques à cette épreuve. En particulier, il semble nécessaire de rappeler que les candidats doivent savoir déterminer l'équation d'une droite ou d'un plan, étudier analytiquement les positions relatives de droites ou de plans, réduire puis reconnaître la nature d'une conique ou d'une quadrique, calculer la dérivée d'une fonction rationnelle, déterminer un lieu géométrique.

Ces conseils doivent contribuer à un seul but : permettre au candidat d'acquérir une extrême familiarité avec ces types d'exercices. En outre, il s'agit d'exprimer clairement ce qui se conçoit clairement, d'éviter un galimatias de termes dont on n'est pas toujours sûr du sens. Le jury attend que les candidats réagissent avec intelligence, et efficacité aux questions auxquelles ils ont à répondre.

REMARQUES PARTICULIERES

La partie A portait sur l'étude d'un cône de révolution et de ses intersections par divers plans. Il s'agissait de questions très simples ; elles ont permis de récompenser les candidats qui ont su développer une vision dans l'espace minimale.

15% des candidats ne reconnaissent pas un cône, 30% d'entre eux ne parviennent pas à former l'équation du plan tangent et seuls 5% parviennent à répondre de façon satisfaisante à la dernière question.

La partie B était plus difficile, 75% des candidats ont reconnu les hyperboles ; 15% d'entre eux ont su donner les coordonnées des foyers et des sommets, il ne s'agissait pourtant que d'appliquer une formule du cours ; le calcul de la courbure a été bien réussi. Les autres questions n'ont été abordées correctement que par un nombre très faible de candidats.

La partie C proposait l'étude de la podaire d'une parabole.
10% des candidats ont fourni une équation fausse pour la parabole.
50% des candidats n'ont pas été capables de trouver les coordonnées du point N, il s'agit pourtant de techniques très simples, connues depuis le lycée ; ces candidats gagneraient sans doute, à consacrer davantage de temps à la géométrie, durant leur préparation au concours.
20% des candidats enfin, ont traité cette partie de façon satisfaisante.

Ce sujet, d'une longueur raisonnable nécessitait connaissance du cours et maîtrise des techniques algébriques de base. Certains candidats ont parfaitement réussir cette épreuve dans le temps imparti. Enfin, la juste répartition des quelques questions difficiles a permis à ce sujet de jouer son rôle exigeant de filtre.

CONCLUSION

Nous rappelons aux futurs candidats les conseils suivants

- **une bonne maîtrise des techniques de calcul est indispensable** : ce type d'épreuve ne donne pas le droit d'hésiter sur les questions les plus courantes ;
- **une bonne connaissance du cours** permet de répondre rapidement et efficacement à de nombreuses questions ;
- **il est nécessaire que les candidats se donnent le temps de lire posément l'énoncé** : trop de problèmes rencontrés dans les copies sont liés à la compréhension du texte ou à une absence de recul ;
- **il convient d'assurer une rédaction correcte**, exempte de grosses erreurs morphologiques ou syntaxiques, et faisant sens ; **ce sont souvent les formulations les plus simples qui sont les meilleures, la concision peut concourir à la clarté** ;
- **chercher à esquiver les difficultés ne sert à rien** : les sous réponses sont sévèrement sanctionnées ; à l'inverse le jury s'est montré compréhensif face aux efforts d'explication, même maladroits, des passages difficiles ;
- **les candidats doivent encadrer les résultats et porter une attention particulière à la propreté des copies**, le non-respect de ces consignes est TRES sévèrement sanctionné ;
- quelle que soit la difficulté du sujet, la panique est mauvaise conseillère ; **il faut garder son sang-froid ;** un candidat ayant traité sans grosse erreur les questions simples, en portant un soin particulier à la présentation de sa copie et à la qualité de sa rédaction, aura une note satisfaisante, même s'il n'est pas particulièrement brillant ou original ; la réussite dans l'épreuve de géométrie sanctionne la régularité du travail de préparation pendant les deux années de formation.
- La qualité du français et de l'orthographe est à surveiller. C'est un point de grande importance dans la vie professionnelle d'un ingénieur, appelé à rédiger des rapports scientifiques et techniques.

Il ne reste plus qu'à souhaiter bon courage et bon travail aux candidats de l'année prochaine.