Programme de colle 9

Classe de PT

Semaine du lundi 14 au vendredi 18 novembre

Liste des questions de cours
• Pour tout $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$ qui commutent, $g(\text{Ker } f) \subset \text{Ker } f$ et $g(\text{Im } f) \subset \text{Im } f$. • Pour tout $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\quad \text{Ker}\,(v \circ u) = \text{Ker } u \Longleftrightarrow \text{Ker } v \cap \text{Im } u = \{0\}$ • Centre de $\mathscr{L}(E)$: Les endomorphismes f qui commutent à tout endomorphisme sont les homothéties. • Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^{n-1}(x) \neq 0$ et $f^n(x) = 0$. Montrer que $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ libre.

1 Généralités sur les espaces vectoriels

1.1 Structure algébrique

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel, d'un morphisme d'espace vectoriel.
Caractérisation de $\text{Vect}\,(x_1, \ldots, x_k)$ à l'aide des combinaisons linéaires.
Sommes et sommes directes finies de sous-espaces vectoriels. Projecteurs et symétries.

1.2 Familles et bases

Définition des familles libres, familles liées, famille génératrices, bases.
Base canonique de $\mathbb{K}[X]$. Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre.
Théorème de la base incomplète.
Morphismes et bases : si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors $u : E \to E'$ est entièrement déterminé par la famille $(u(e_i)_{i\in I})$. Caractérisation des injections, surjections et bijections.

1.3 Dimension finie

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie. Caractérisation d'une base.
Base adaptée à une décomposition en somme directe. Caractérisation de $F = F_1 \oplus F_2$.
Rang d'une famille de vecteurs.
Hyperplans et systèmes.
Théorème du rang.

2 Matrices

Matrice d'une application linéaire, rang d'une matrice, produit matriciel, transposition, matrices de passage, formule de changement de base, matrices semblables. Matrices triangulaires.
Matrices blocs. Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. Matrice dans une base adaptée.
Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.