Programme de colle 6

Classe de PT

Semaine du lundi 10 au vendredi 14 octobre

Liste des questions de cours
• Nature des intégrales (preuve) : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t$ où $\beta \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ • Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$. • Soit $\alpha \in]0,1[$. Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{k^\alpha}$ et équivalent des sommes partielles (exercice 25.1). • Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

L'étude classique de la convergence (exercices 18 ou 21, par exemple les deux derniers cas de l'exercice 18) doit etre bien maîtrisée, tant la démarche que la rédaction, même si elle n'apparaît pas sous forme de question de cours : on étudie $|f|$ à l'aide de $\leqslant$, o ou $\sim$, on en déduit que f est intégrable, donc que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1 Intégration

1.1 Intégration sur un segment

Chasles, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne.

1.2 Calculs des primitives

1.2.1 Définition et propriétés

Primitive d'une fonction continue.
Intégration par parties, changement de variables, fonctions de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1.2.2 Calculs

Primitives des fonctions usuelles. Méthodes pour affronter différents cas :

- Fractions rationnelles $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$.
- Polynôme fois exponentielle et assimilés.

1.3 Intégrales sur un intervalle quelconque

1.3.1 Intégrales généralisées

Définition d'une intégrale convergente, d'une intégrale divergente.
Cas d'une fonction prolongeable par continuité.
Théorèmes de changement de variable, IPP.

1.3.2 Le cas des fonctions positives

1.3.2.1 Fonctions usuelles Au voisinage de $+\infty$ (Riemann et exponentielles), au voisinage de 0 (Riemann, $\ln(x)$).
Ces fonctions doivent être parfaitement connues

1.3.2.2 Relations de comparaison Majoration, grand O, petit o, équivalents.
Comparaison séries / intégrales. Calcul approché, majoration et recherche d'équivalents des sommes partielles d'une série divergente ou des restes d'une série convergente.

1.3.3 Intégrabilité et fonctions intégrables

Définition de l'*intégrabilité* et des fonctions *intégrables*. L'intégrabilité entraîne la convergence.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue , alors $\displaystyle\int_I |f| = 0 \Longrightarrow f = 0$.