

# Programme de colle 4

Classe de PT

Semaine du lundi 26 au vendredi 30 septembre

## Liste des questions de cours

- Nature de la série de Bertrand  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  selon  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , pour  $\alpha \neq 1$ .
- Soit  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$ . Montrer que  $f = 1$  ou  $f = -1$ .
- Les dix DL usuels : famille exponentielle ( $\exp, \cos, \sin$ ), géométrique ( $\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}, \ln(1+x), \ln(1-x), \text{Arctan}(x)$ ),  $(1+x)^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  à l'ordre  $n$ ;  $\tan(x)$  à l'ordre 3.
- Limite en  $0^+$  de  $x \mapsto \frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$ .
- Variations, limite et équivalent de la suite  $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t dt$ .

Toute défaillance sur un DL usuel au cours de la colle entraînera une note en dessous de 5.

## 1 $\mathbb{R}$ et les suites réelles

### 1.1 Séries numériques

Révisions de PTSI : définition de la convergence, de la convergence absolue.

Séries de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Comparaison de séries à termes positifs :  $\leq$ , grand  $O$ , petit  $o$ , équivalent.

## 2 Fonctions d'une variable réelle

### 2.1 Continuité

Définition ; propriétés.

«  $f$  continue sur un segment  $[a, b]$  est bornée et atteint ses bornes ».

Théorème des valeurs intermédiaires ; théorème de la bijection.

### 2.2 Dérivabilité

Définition ; propriétés ; théorème de Rolle et ses conséquences : égalité et inégalité des accroissements finis.

Théorème de la limite de la dérivée.

### 2.3 Relations de comparaisons, Taylor, Développement limités

Révisions de PTSI : Taylor reste intégral, Taylor Young. Grand  $O$ , petit  $o$ , équivalents.

Calculs de DL ; utilisation de la parité ; intégration d'un DL ; exemple de fonction admettant un DL à un ordre supérieur à 1, sans être plus que dérivable ;

Les DL des fonctions hyperboliques  $\text{sh}$ ,  $\text{ch}$ , et de  $\text{Arcsin}$  doivent pouvoir être retrouvés rapidement.

## 3 Intégration

### 3.1 Intégration sur un segment

Chasles, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne.

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors  $\int_{[a,b]} |f| = 0 \implies f = 0$ .

### 3.2 Calculs des primitives

#### 3.2.1 Définition et propriétés

Primitive d'une fonction continue.

Intégration par parties, changement de variables, fonctions de la forme  $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ .

#### 3.2.2 Calculs

Primitives des fonctions usuelles. Méthodes pour affronter différents cas :

- Fractions rationnelles  $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ .
- Polynôme fois exponentielle et assimilés.