Programme de colle 23

Classe de PT

Semaine du lundi 27 au vendredi 31 mars

Liste des questions de cours
• La loi de Poisson, définie sur les $\{k\}$ et étendue à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ par $\forall A \in \mathscr{A}\ P(A) = \sum_{k \in A} P(\{k\})$, définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. • Formule des probabilités totales, avec preuve. • (loi conditionnelle) Une grenouille pond X oeufs selon une loi de poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$, chaque oeuf éclot de façon indépendante selon une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Loi du nombre Y d'oeufs éclot. • (loi de couple) On effectue une suite de lancers indépendants avec une pièce non équilibrée (probabilité $p \in]0,1[$ d'avoir pile). Donner la loi de la longueur X de la première chaîne, et Y de la deuxième chaîne. • Séries génératrice d'une variable aléatoire discrète suivant une loi de géométrique, d'une variable aléatoire discrète suivant une loi Poisson. Avec preuve.

1 Probabilités

1.1 Ensembles, cardinaux, tribus

Lien entre propositions et ensembles associés (et, ou, non, $\forall$, $\exists$). Définition d'un ensemble dénombrable, $\mathbb{Z}$ est dénombrable, un produit cartésien d'ensemble dénombrable est dénombrable. Tribus.

1.2 Probabilités

1.2.1 Généralités

Probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$. Vocabulaire : univers, événement, événements incompatibles, système complet d'événements ; événement presque sûr, événement négligeable. Croissance, $P(A \cup B)$, continuité croissante et décroissante, sous-additivité.
Lois géométrique et de Poisson sur $\mathbb{N}$.

1.2.2 Probabilités conditionnelles, indépendance

Définition. Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle.

1.3 Variables aléatoires discrètes

1.3.1 Généralités

Définition, loi d'une variable aléatoire discrète, égalité en loi, image par un application.
Fonction de répartition.

1.3.2 Couples de variables aléatoires discrètes, indépendance

Définition, loi conjointe, loi marginale. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes, indépendance mutuelle d'une famille de variables aléatoires discrètes.

1.3.3 Moments : espérance, variance

Variable aléatoire discrète d'espérance finie. Théorème du transfert. Linéarité, positivité, croissance de l'espérance (sous réserve d'existence). Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes.
Variance, propriétés.
Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev.

1.3.4 Couple : covariance

Covariance, coefficient de corrélation. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Variance d'une somme de deux variables aléatoires ; cas de variables indépendantes.

1.3.5 Séries génératrices

Le rayon de convergence est au moins égal à 1.
Liens entre série génératrice et espérance, variance, et loi de la variable aléatoire.
Série génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.

1.4 Lois usuelles

Lois uniforme, de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, géométrique $\mathscr{G}(p)$ et de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.
Espérance, variance et série génératrice dans chacun des cas.
La loi géométrique est la loi sans mémoire.
Loi faible des grands nombres.