

# Programme de colle 17

Classe de PT

Semaine du lundi 30 janvier au vendredi 3 février

## Liste des questions de cours

- Liberté des familles orthogonales de vecteurs non nuls
- Distance d'un point à un sous-espace vectoriel (avec preuve).
- Un projecteur  $p$  est un projecteur orthogonal si et seulement si  $\forall x \in E \|p(x)\| \leq \|x\|$  (avec preuve).
- Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $u$  est une symétrie orthogonale si et seulement si  $u$  est une symétrie et un endomorphisme orthogonal (avec preuve).
- Plan d'étude d'une matrice  $3 \times 3$  orthogonale.
- Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont deux à deux orthogonaux.

## 1 Algèbre bilinéaire

### 1.1 Préhilbertiens

Définition d'un produit scalaire, norme associée, propriétés de la norme.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme et de polarisation.

Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale. Orthogonal d'un sous-espace.

Théorème de Pythagore.

### 1.2 Euclidiens

Existence de bases orthonormales ; méthode de Gram-Schmidt.

Calculs dans une base orthonormale : produit scalaire, norme, matrice d'un endomorphisme.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; sommes directes associées.

Distance à un sous-espace de dimension finie. Inégalité de Bessel.

### 1.3 Isométries

Définition et valeurs propres d'une isométrie. Groupe  $\mathcal{O}(E)$ . L'orthogonal d'un sous-espace stable est stable.

Une symétrie est un endomorphisme orthogonal si et seulement si c'est un endomorphisme orthogonal.

Définition et déterminant d'une matrice orthogonale. Groupes  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $SO_n(\mathbb{R})$ .

Description dans le cas des dimensions 2 et 3, études pratiques. En particulier détermination de l'axe et de l'angle d'une rotation de  $\mathbb{R}^3$ . Orientation, bases directes et indirectes.