Exercices : Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = 1$, $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 0$. Montrer que f est bornée et atteint sa borne supérieure. Qu'en est-il de la borne inférieure ?

Exercice 3
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I,\ f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 4 (Petites mines)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

1) Montrer que l'équation $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$ possède au moins une solution.

2) Montrer que $\forall n \geqslant 2,\ f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ possède au moins une solution.

Exercice 5
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = 2x^3 \cos\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$ pour $x \neq 0$.
Étudier la continuité et la dérivabilité de f, puis la continuité de f'.

Exercice 6
Domaine de définition et dérivée des fonctions suivantes :
1) $f(t) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+t^2} - t\right)$ **2)** $f(t) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)$ puis montrer que $f(t) = 2\operatorname{Arctan}\sqrt{t}$.

Exercice 7 (Convexité)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable, concave et vérifiant $f(0) \geqslant 0$. Montrer que f est sous-additive c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \qquad f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$$

Exercice 8
Soit $p, q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^{*}, \qquad \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab$$

Exercice 9
Sans calculs, montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Exercice 10
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Montrer que

$$\frac{x_1}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$$

Exercice 11
Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction paire de classe $\mathscr{C}^n$.
Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots n\}$, $f^{(k)}$ a la parité de k.

Exercice 12 (Construction de fonctions $\mathscr{C}^\infty$)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$.

1) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Calculer f' sur $\mathbb{R}^*$, en déduire que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) On se place sur $]0, +\infty[$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$, la dérivée n-ième de f, est de la forme $P_n(1/x)\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$, où P_n est un polynôme. (sans hypothèse sur $\deg P_n$).

3) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4) Des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support dans un segment.

a) Soit $[a, b]$ un segment. Montrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que g est nulle hors de $]a, b[$, $g > 0$ sur $]a, b[$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut trouver g vérifiant les hypothèses précédentes et de plus $g = 1$ sur $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Indication : *Penser aux primitives.*

5) Le but de cette question est de trouver des fonctions qui admettent un DL mais ne sont pas $\mathscr{C}^1$.

a) Montrer que $\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = o(x^n)$ en $x = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Construire une fonction g qui admet un DL en 0 à l'ordre n pour tout n et qui n'est pas $\mathscr{C}^1$. Indication : *On pourra s'inspirer de la fonction de l'exercice 5.*

Exercice 13 (Développements limités)
Donner le DL à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1) $\dfrac{x}{e^x - 1}$ **2)** $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ **3)** $\operatorname{Arctan} \sqrt{1+x}$ **4)** $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

5) $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ **6)** $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ **7)** $(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$ **8)** $e^{\cos(\ln(\cos x))}$

Donner le DL à l'ordre indiqué et au point indiqué des fonctions suivantes :

9) $\ln\left(\tan \dfrac{x}{2}\right)$ ordre 3 en $\dfrac{\pi}{2}$ **10)** $(x^3 + x)^{1/3} - (x^3 - x)^{1/3}$ ordre 4 en $+\infty$

Exercice 14 (Limites)
Donner la limite en 0^+ des expressions suivantes :

1) $\dfrac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$ **2)** $(\ln(e + x))^{\frac{1}{x}}$

Donner la limite en $+\infty$ des expressions suivantes :

3) $\left[\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right] \ln x$ **4)** $\left[e - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{1/x}$

Exercice 15
Montrer que les fonctions suivantes sont inversibles au voisinage de 0, puis déterminer le DL de celles-ci à l'ordre 3 en $f_i(0)$.

1) $f_1(x) = x + \operatorname{sh} x$ **2)** $f_2(x) = x + e^{\operatorname{Arctan} x} - \cos x$

Exercice 16
Donner le DL à l'ordre 3 en 0 des solutions (au voisinage de 0) des équations différentielles suivantes :

1) $y' = e^x y + x \cos x$ et $y(0) = 1$ **2)** $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{Arctan} x$ et $y(0) = 1$