Exercices : Suites

Exercice 1
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite ℓ. Étudier $(|u_n|)$ (écrire la définition de la limite, avec des ε).

Exercice 2
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite.

1) Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, est-ce que (u_n) converge ?

2) Si (u_{2n}), (u_{3n}) et (u_{2n+1}) convergent, est-ce que (u_n) converge ?

Exercice 3
Soit (u_n) une suite croissante dont une suite extraite converge. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 4 (Cesàro)

1) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite nulle. Montrer que $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers 0.

2) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergeante, de limite ℓ. Montrer que $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers ℓ. On pourra se ramener à $\ell = 0$ pour appliquer le 1).

Exercice 5
Convergence et limites éventuelles des suites suivantes :

1) $u_n = (-1)^n (\ln n)^{(-1)^n}$ **2)** $u_n = \cos\left(\dfrac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$ **3)** $u_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $x \in \mathbb{R}$

4) $u_n = \dfrac{n^p}{n!}$ où $p \in \mathbb{N}$ fixé. **5)** $u_n = \left(\dfrac{5}{\sqrt{n}} + \dfrac{2}{3}\sin n\right)^n$ **6)** $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

Exercice 6

1) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{2+x}$. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 2]$.

b) Montrer que (u_n) est croissante.

c) En déduire que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

2) Sur le même modèle, étudier les suites suivantes. On pourra commencer par résoudre $f(x) = x$ pour distinguer des cas.

a) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n^2+1}$ **b)** $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+u_n^2}$

c) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ (Indication : *discuter selon u_1, après avoir trouvé les points fixes de f*)

Exercice 7

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution dans $[0, 1]$. On notera ℓ cette solution.

c) Montrer que $\exists k \in [0, 1[/ \forall n \in \mathbb{N}\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant k|u_n - \ell|$.

d) En déduire que (u_n) converge vers ℓ.

2) Sur le même modèle, étudier les suites suivantes

a) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{2u_n^2+1}$

Exercice 8

1) Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

2) En déduire les limites des suites suivantes :

a) $u_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\dots(n+n)}$ **b)** $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$.

Exercice 9
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie, lorsque c'est possible, par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 5}$.

1) Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle constante ?

2) Montrer que si $u_0 \neq -2$, alors $u_n \neq -2$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) On suppose $u_0 \neq -2$ et on définie $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$. Étudier (v_n), en déduire l'expression de u_n en fonction de n et finir l'étude de (u_n).

4) Pour quels u_0 la suite (u_n) est-elle définie ?

Exercice 10 (Vrai-Faux)
Soit (u_n) et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (et le prouver) :

1) (u_n) non majorée $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) (u_n) croissante non majorée $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

4) $(\forall n\, u_n \geqslant 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0) \Longrightarrow (u_n)$ décroissante.

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longrightarrow u_n \sim u_{n+1}$.

6) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(U_{n+1} - U_n) = 0$ (et réciproquement ?)

7) $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. (et réciproquement ?)

Exercice 11
Convergence et limite des suites suivantes :

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$ **2)** $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 12
Limite et éventuellement équivalent en $+\infty$ des suites suivantes :

1) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ **2)** $u_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ **3)** u_n vérifiant l'encadrement $n\pi \leqslant u_n \leqslant n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 13 (Oral petites mines 2012)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement une racine dans $]0,1[$ et une racine dans $]1,+\infty[$. On les notera x_n et y_n respectivement.

2) Déterminer la limite et un équivalent de (x_n).

3) Déterminer la limite ℓ de (y_n), puis un équivalent de $y_n - \ell$.

Exercice 14
Soit (u_n), (v_n), (u'_n) et (v'_n) des suites de réels *strictement positifs*. Montrer que, si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $u_n + u'_n \sim v_n + v'_n$.