

**Exercice 1**

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite convergente, de limite  $\ell$ . Étudier  $(|u_n|)$  (écrire la définition de la limite, avec des  $\varepsilon$ ).

**Exercice 2**

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite.

- 1) Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent, est-ce que  $(u_n)$  converge ?
- 2) Si  $(u_{2n}), (u_{3n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent, est-ce que  $(u_n)$  converge ?

**Exercice 3**

Soit  $(u_n)$  une suite décroissante dont une suite extraite converge. Montrer que  $(u_n)$  converge.

**Exercice 4 (Cesàro)** 1) Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite de limite nulle. Montrer que  $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$  converge vers 0.

- 2) Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite convergente, de limite  $\ell$ . Montrer que  $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$  converge vers  $\ell$ . On pourra se ramener à  $\ell = 0$  pour appliquer le 1).
- 3) La réciproque du théorème précédent est-elle vraie ?

**Exercice 5**

Convergence et limites éventuelles des suites suivantes :

- |   |   |  |
|---|---|--|
| 1) $u_n = (-1)^n (\ln n)^{(-1)^n}$                    | 2) $u_n = \cos \left( \frac{n^2 + n + 1}{n + 1} \pi \right)$        | 3) $u_n = \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n \quad x \in \mathbb{R}$ |
| 4) $u_n = \frac{n^p}{n!}$ où $p \in \mathbb{N}$ fixé. | 5) $u_n = \left( \frac{5}{\sqrt{n}} + \frac{2}{3} \sin n \right)^n$ | 6) $u_n = \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$                                |

**Exercice 6** 1) Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x + \sin x$ .

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 \in ]0, \pi[$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0, \pi]$  (Indication :  $f([0, \pi]) \subset [0, \pi]$ ).
  - b) Montrer que  $(u_n)$  est croissante (Indication : Étude de  $f(x) - x$ ).
  - c) En déduire que  $(u_n)$  converge, et déterminer sa limite.
- 2) Sur le même modèle, étudier les suites suivantes. On pourra commencer par résoudre  $f(x) = x$  pour distinguer des cas.

- |  |   |
|--|---|
| a) $u_0 \in [-3/2, +\infty[$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ .  | b) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$ |
| c) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{u_n}$ |   |

**Exercice 7** 1) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \cos x$ . Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0, 1]$ .
  - b) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  a une unique solution dans  $[0, 1]$ . On notera  $\ell$  cette solution.
  - c) Montrer que  $\exists k \in [0, 1[ \forall n \in \mathbb{N} |u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell|$ .
  - d) En déduire que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .
- 2) Sur le même modèle, étudier les suites suivantes

- |   |   |
|---|---|
| a) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = e^{-u_n}$ | b) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{3}{2u_n^2 + 1}$ |
|---|---|

**Exercice 8** 1) Soit  $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$  une suite telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$ .

2) En déduire les limites des suites suivantes :

$$\text{a) } v_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

$$\text{b) } w_n = \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$$

### Exercice 9 (Vrai-Faux)

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (et le prouver) :

- 1)  $(u_n)$  majorée  $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  existe.
- 2)  $(|u_n|)$  converge  $\implies (u_n)$  converge.
- 3) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  n'ayant pas de limite en  $+\infty$ .  $\lim u_n = +\infty \implies (f(u_n))$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .
- 4)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .
- 5)  $(\forall n \in \mathbb{N} |u_n| \leq |v_n| \text{ et } (v_n) \text{ converge}) \implies (u_n) \text{ converge}$ .
- 6)  $\forall (u_n) u_n \sim u_{n+1}$ . Puis sous les hypothèses suivantes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ;  $(u_n)$  converge.
- 7)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{n+1} - U_n) = 0$  (et réciproquement ?)
- 8)  $\left( \sum_{k=0}^n u_k \right)$  converge  $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ . (et réciproquement ?)

### Exercice 10

Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  la suite définie, lorsque c'est possible, par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 5}$ .

- 1) Pour quelles valeurs de  $u_0$  la suite est-elle constante ?
- 2) Montrer que si  $u_0 \neq -2$ , alors  $u_n \neq -2 \forall n \in \mathbb{N}$ .
- 3) On suppose  $u_0 \neq -2$  et on définit  $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  par  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ . Étudier  $(v_n)$ , en déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et finir l'étude de  $(u_n)$ .
- 4) Pour quels  $u_0$  la suite  $(u_n)$  est-elle définie ?

### Exercice 11

Soit  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  fixés. On considère les suites définies par  $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$ .

Montrer que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont convergentes de même limite.

### Exercice 12

Convergence et limite des suites suivantes :

$$1) u_n = \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$$

$$2) u_n = \left( \frac{(2n)!}{n!n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

### Exercice 13

Limite et équivalent en  $+\infty$  des suites suivantes :

$$1) u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \quad 2) u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad 3) u_n \text{ vérifiant l'encadrement } n\pi \leq u_n \leq n\pi + \frac{\pi}{2}$$

### Exercice 14 (Oral petites mines 2012)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f_n(x) = x^n - nx + 1$ .

- 1) Montrer que, pour tout  $n \geq 3$ , l'équation  $f_n(x) = 0$  admet exactement une racine dans  $]0, 1[$  et une racine dans  $]1, +\infty[$ . On les notera  $x_n$  et  $y_n$  respectivement.
- 2) Déterminer la limite et un équivalent de  $(x_n)$ .
- 3) Déterminer la limite  $\ell$  de  $(y_n)$ , puis un équivalent de  $y_n - \ell$ .

### Exercice 15

Soit  $(u_n), (v_n), (u'_n)$  et  $(v'_n)$  des suites de réels *strictement positifs*. Montrer que, si  $u_n \sim v_n$  et  $u'_n \sim v'_n$ , alors  $u_n + u'_n \sim v_n + v'_n$ . Contre exemple dans le cas où les réels ne sont pas strictement positifs.