Exercices : Probabilités

Exercice 1 (Familles sommables)
Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}$.

Exercice 2
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, et $A, B \in \mathscr{A}$.

1) Montrer que $P(A)P(\overline{A}) \leqslant \dfrac{1}{4}$

2) En déduire que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leqslant \dfrac{1}{4}$

Exercice 3 (Probabilités usuelles sur $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}$)
Dans cet exercice, $\Omega = \mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N}$, muni de la tribu totale $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.

1) Soit $\Omega = \mathbb{N}^*$, et $p \in]0,1[$. Posons $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(\{k\}) = p(1-p)^{k-1}$, puis, pour $A \in \mathscr{A}$, $P(A) = \displaystyle\sum_{k \in A} P(\{k\})$.

- **a)** Montrer que P définit une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$.
- **b)** Soit A l'évènement « $n \geqslant 10$ ». Calculer $P(A)$.

2) Soit $\Omega = \mathbb{N}$, et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(\{k\}) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ étendu à $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ comme ci-dessus.
Montrer que P définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

Exercice 4

1) Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$.
Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} P(\{n\}) = 0$$

2) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
Montrer

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = 0$$

Exercice 5

1) Soit $\Omega = [\![1, 6]\!]^{\mathbb{N}}$ représentant un nombre dénombrable de lancers de dé indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons l'événement :

$$A_n : \text{« Le } n\text{-ième lancer est un 4. »}$$

Exprimer à l'aide de phrase puis à l'aide de quantificateurs les événements suivants :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n = \bigcup_{m \geqslant n} A_m = \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m \qquad \text{et} \qquad B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

2) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad B_n = \bigcup_{m \geqslant n} A_m$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathscr{A}$, puis que

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n)$$

3) (Borel-Cantelli) On suppose de plus que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} P(A_n)$ converge. Montrer que $P\left(\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = 0$.

Exercice 6
Soit A et B deux évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1) Montrer que, si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

2) Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont.

Exercice 7

1) Considérons une famille ayant exactement deux enfants. Notons f les filles et g les garçons. Il y a 4 possibilités, en notant le plus âgée en premier :

$$ff, fg, gf, gg$$

On suppose qu'il y a équiprobabilité.

a) On suppose que l'un des enfants est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

b) Soit A : « La famille a au plus un garçon » et B : « Il y a des enfants des deux sexes ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

c) L'aînée est une fille (événement A') , quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ? A' et B sont-ils indépendants ?

2) Désormais la famille a exactement 3 enfants. Comparer les événements A_3 et B_3.

Exercice 8
L'urne U, au contenu évolutif, contient au départ 1 boule blanche et $n-1$ boules noires ($n \geqslant 2$). On effectue des tirages successifs de la façon suivante :

- si au k-ième tirage on tire la boule blanche, on s'arrête, on a gagné ;
- si au k-ième tirage on tire une boule noire, alors on remet la boule noire dans l'urne, on ajoute une boule noire en plus dans l'urne U et on procède au $(k+1)$-ième tirage.

On note B_k [resp. N_k] les événements « on a effectué $(k-1)$ tirages sans obtenir la boule blanche, et le k-ième tirage apporte la boule blanche [resp. une boule noire] ». Après les avoir décrits, calculer les probabilités des événements suivants :

$$N_k \quad ; \quad B_k \quad ; \quad \bigcup_{h \leqslant k} B_h \quad ; \quad \overline{B_k \cup N_k} \quad ; \quad \bigcup_{h \geqslant 1} N_h \quad ; \quad \bigcup_{h \geqslant 1} B_h \quad ; \quad \bigcap_{h \geqslant 1} N_h .$$

Exercice 9
Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants.
Montrer que la probabilité qu'aucun des A_n ne soit réalisé est inférieure à

$$\exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\right)$$

<u>Indication</u> : *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leqslant e^x$.*

Exercice 10 (Loi hypergéométrique)

1) On considère une urne contenant n boules, b blanches et $n-b$ noires. On tire p boules, sans remise. Soit X le nombre de boules blanches tirées. Donner la loi de X.

2) Application à l'estimation de la taille d'une population : des poissons dans un lac. On suppose que 1000 poissons sont capturés, marqués, puis relâchés. Une seconde pêche capture 1000 nouveaux poissons, dont 100 marqués. On suppose qu'entre les deux pêches le nombre de poisson n'a pas bougé, et qu'ils se sont parfaitement mélangés.

a) Quelle est la probabilité de l'événement « la seconde pêche comporte 100 poissons marqués », en appelant n le nombre de poissons au total dans le lac.

b) Quelle est cette probabilité si $n = 2000$?

Exercice 11
Une maladie rare touche un individu sur 100 000. On dispose d'un test de dépistage qui est positif pour 95% des personnes malades et pour 0.5% des individus sains. Un individu est testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ? Ce test vous paraît-il fiable ? Et si le test est négatif, que doit-on en penser ?

Exercice 12
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

1) Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$, donner la loi de $Z = X + Y$.

2) Si $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $Y \sim \mathscr{G}(p)$, avec $p \in]0,1[$, donner la loi de $Z = X + Y$.

3) Si $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $Y \sim \mathscr{G}(q)$, avec $p,\ q \in]0,1[$, donner la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 13
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}, \qquad P\left(X = j, Y = k\right) = \frac{a}{j!k!}$$

où $a \in \mathbb{R}$ tel que P soit une loi de probabilité.

1) Déterminer la valeur de a.

2) Reconnaître les lois marginales de X et Y.

3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 14
Deux joueurs A et B s'affrontent à un jeu de dé 6 faces (supposé parfaitement équilibré). A commence la partie et lance le dé. S'il obtient 1 ou 2, A est déclaré vainqueur et la partie s'arrête. Sinon, B prend la main et jette le dé : s'il obtient 3, 4 ou 5, il a gagné et la partie s'arrête. Sinon, A prend la main et on recommence dans les mêmes conditions ...
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le résultat du n-ième lancer, A_{2n-1} l'évènement « A gagne au $(2n-1)$-ième lancer » et B_{2n} l'évènement « B gagne au $2n$-ième lancer ».

1) Soit n entier naturel non nul. Exprimer A_{2n-1} et B_{2n} à l'aide des $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, puis calculer leur probabilité.

2) Quelles sont les probabilités des évènements G_A :« A gagne », G_B :« B gagne » et H :« la partie ne s'arrête pas ».

Exercice 15 (Marche aléatoire — CCINP PC 2020)
Une puce se déplace sur la droite réelle. Au départ (à $t = 0$), elle est à l'origine $x = 0$. A chaque étape, on jette une pièce équilibrée, si le résultat est Pile, la puce se déplace de 1 vers la gauche (donc de -1), si le résultat est Face, elle se déplace de 1 vers la droite. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons X_n la position de la puce après n étapes.

1) Donner la loi de la variable aléatoire Y_n représentant le déplacement lors de la n-ième étape.

2) Quelle est la probabilité d'être de retour à l'origine 0 à la $2n + 1$-ième étape ?

3) On note $\widetilde{Y}_n = (1 + Y_n)/2$. Quelle est la loi de $\widetilde{Y}_n$? Prouver que les $(\widetilde{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendantes, puis donner la loi de $\widetilde{X}_n = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{Y}_k$.

4) Exprimer X_n en fonction des $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. En déduire la loi de X_n.

5) Quelle est la probabilité d'être de retour à l'origine 0 à la $2n$-ième étape ? Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 16
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 17
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Modélise une succession de lancers de pile ou face, avec probabilité p d'obtenir pile.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $U_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.
Dans la modélisation précédente, Y_n est un succès si les lancers n et $n+1$ donnent pile. U_n est le nombre de succès de Y_n entre 1 et n.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de Y_n puis calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

2) Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < m$. Les variables Y_n et Y_m sont-elles mutuellement indépendantes ? Calculer $\operatorname{Cov}(Y_n, Y_m)$.

3) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(U_n)$ et $V(U_n)$.

Exercice 18
Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$P\Big(X < \frac{\lambda}{2}\Big) \leqslant \frac{4}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad P(X > 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

Exercice 19
Une usine confectionne des pièces dont une proportion p est défectueuse. On effectue un prélèvement de n pièces et on note Z_n la variable aléatoire discrète représentant le nombre de pièces défectueuses dans ce prélèvement. On veut approcher p par la proportion $\dfrac{Z_n}{n}$ de pièces défectueuses sur cet échantillon.
Remarque : dans ce problème on suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande. Par conséquent, le prélèvement peut être considéré comme une suite de n tirages indépendants avec remise.

1) Quelle est la loi de Z_n ?

2) En déduire sa moyenne et sa variance.

3) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\dfrac{Z_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

4) En déduire une condition sur n pour que l'approximation donne une valeur approchée de p à 0.01 près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice 20 (Urnes de Polya – cas particulier)
Une urne contient au départ 1 boule noire et 1 boule blanche. On effectue une suite de tirages qui consiste à tirer une boule de l'urne, regarder sa couleur, et la remettre dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur avant le tirage suivant. On cherche à déterminer l'évolution de la proportion de boules noires dans l'urne.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de boules noires à l'issue du n-ième tirage. En particulier $X_0 = 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « tirer une boule noire lors du n-ième tirage ».

1) Quel est le nombre de boules avant le n-ième tirage ?

2) Déterminer les lois de X_0, X_1 et X_2.

3) Déterminer par récurrence la loi de X_n.

4) À l'aide de la loi des $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$, déterminer la probabilité de l'évènement A_n.

Pour le cas général, on pourra consulter le sujet CCINP 2021.

Exercice 21 (Chaîne de Markov)
Un processus de Markov est un système sans mémoire : l'information pour l'état futur du système est contenue dans l'état présent, et ne dépend pas du passé. Voici un exemple de *chaîne de Markov.*
Chaque soir, pour dîner, vous avez 3 possibilités : vous faire des pâtes chez vous (0), aller au self (1), ou commander une pizza (2).

(0) Si vous avez mangé chez vous la veille, la probabilité d'aller au self le lendemain est de 1/2, celle de commander une pizza 1/4, et donc celle de rester chez vous 1/4.

(1) Si vous êtes allé au self la veille, la probabilité de manger chez vous est 1/2 et celle de commander une pizza 1/3.

(2) Si vous avez mangé une pizza la veille, la probabilité de rester chez vous est 1/3 et d'aller au self 1/3.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le type de repas pris le n-ième jour.
On suppose que le premier repas (numéro 0) est pris au self.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner $X_n(\Omega)$.

2) *Graphe*

  a) Représenter le problème sous forme d'un graphe pondéré.

  b) Donner la matrice d'adjacence $A = (a_{ij})_{0 \leqslant i,j<3}$.

  c) Soit $(i, j) \in [\![0, 3[\![^2$. Que contient le coefficient a_{ij} ?

On remarquera que le graphe est fortement connexe si et seulement si tous les coefficients de A sont strictement positifs. La chaîne de Markov est alors dite « irréductible ».

3) Donner les lois de X_0 et X_1.

4) Déterminer la probabilité de manger chez vous le jour $n = 2$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $P(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $V_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$V_{n+1} = MV_n$$

et en déduire V_n en fonction de M, de n et de V_0.

7) Étude de la *matrice stochastique* M. Nous allons illustrer le théorème de Perron-Frobenius, qui affirme, dans le cas de notre matrice stochastique à coefficients tous non nuls, que $1 = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(M)} |\lambda|$ est une valeur propre simple, et qu'il existe un vecteur propre, pour la valeur propre 1, à coefficients tous strictement positifs.

  a) Que vaut $M^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$? Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}\,(M)$.

  b) Soit $e_1 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ un vecteur propre de M pour la valeur propre 1, tel que $x_i \geqslant 0$ pour tout i.
  Montrer qu'on peut supposer que la somme des coordonnées de X vaut 1.
  Posons $V_0 = e_1$, que vaut V_n, pour tout n ?

  c) Réduire M : montrer que 1 est valeur propre simple et que les autres valeurs propres sont de module strictement plus petit que 1.

On montrera, dans le cadre des espaces vectoriels normés, que la suite (V_n) converge vers l'état stable e_1.

Exercice 22 (Motifs dans une suite de pile ou face)
On dispose d'une pièce qui, lorsqu'elle est lancée, tombe sur « pile » (P) avec la probabilité p et tombe sur « face » (F) avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que p est dans $]0, 1[$.

Deux joueurs, Auguste et Bérengère, s'affrontent dans une suite de lancers de pièce.
Chacun d'eux choisit un motif formé d'une suite de trois piles ou faces avant le début de la partie.

- Auguste parie sur le motif PPF (pile, pile, face),
- Bérengère parie sur le motif FPP (face, pile, pile),

Puis la pièce est lancée plusieurs fois de suite jusqu'à ce qu'un des deux motif apparaisse, désignant le gagnant.
La probabilité d'un évènement A lié à ce jeu sera noté $\mathbb{P}(A)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n la variable aléatoire qui donne la valeur du n-ième lancer : la variable X_n prend la valeur P lorsque la pièce tombe sur « pile » et la valeur F lorsque la pièce tombe sur « face ». Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_n = P) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_n = F) = q$$

Les lancers sont supposés indépendants, donc les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

1) Le match nul.

Le but de cette question est d'étudier l'évènement H : « Personne ne gagne la partie ».
Pour simplifier, on groupe les suites de lancers en paquets de 3, en commençant au premier lancer :

« PFPFFFPFPFFPFFPFFPPPP... » sera découpé en « |PFP|FFF|PFP|FFP|FFP|FFP|PPP|... »

On ne considère que les motifs « $X_{3n+1}X_{3n+2}X_{3n+3}$ ». Ainsi le « FPP » qui apparaît vers la fin de la chaîne n'est pas détecté, car découpé sur 2 paquets.
Soit T la variable aléatoire discrète donnant le numéro du premier *paquet* égal à « FPP ».
Si le motif « FPP » n'apparaît dans aucun paquet, $T = +\infty$.

a) Étude de la variable aléatoire discrète T.
- **i)** Donner $T(\Omega)$.
- **ii)** Décrire l'évènement $(T = 1)$ à l'aide des $(X_k)_k$, puis en déduire sa probabilité.
- **iii)** Pour tout $n \in T(\Omega)$, donner les valeurs de $\mathbb{P}(T = n)$.
- **iv)** On exclue $+\infty$ de $T(\Omega)$. Quelle loi classique suit T ?

b) Déduire de T la probabilité $\mathbb{P}(H)$: le jeu se termine-t-il ?

Le raisonnement peut être reproduit pour tout motif arbitraire de longueur $m \in \mathbb{N}^*$. C'est ce qu'on appelle le paradoxe du singe.

2) Probabilités de victoire de A et B.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Notons les évènements suivants :
- E_n : « le jeu n'est pas terminé après n lancers ».
- A_n : « le n-ième lancer fait gagner Auguste », c'est-à-dire PPF vient d'apparaître pour la première fois (et FPP n'est pas apparu avant).
- B_n : « le n-ième lancer fait gagner Bérengère ». c'est-à-dire FPP vient d'apparaître pour la première fois (et PPF n'est pas apparu avant).

a) Au bout de $n = 1$ ou 2 lancers, l'un des joueur peut-il avoir gagné la partie ?
En déduire les valeurs de $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$ pour $n = 1$, 2 et 3.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 3$. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(A_n)$ qu'Auguste gagne la partie au n-ième lancer.

c) On note G_A : « Auguste a gagné » et G_B : « Bérengère a gagné ».
Déterminer $\mathbb{P}(G_A)$, en déduire $\mathbb{P}(G_B)$. Quelles valeurs obtient-on lorsque la pièce est équilibrée ? Quelle valeur donner à p pour que le jeu soit équitable ?