Exercices : Intégration

Exercice 1
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, \mathrm{d}t$.

1) Montrer que (u_n) est décroissante. Est-elle convergente ?

2) Calculer $u_{n+2} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Déterminer un équivalent de u_n.

Nous verrons, au chapitre « Suites et séries de fonctions », des techniques d'étude de la limite pour cette catégorie de suites.

Exercice 2
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $I_f(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\cos(xt) \, \mathrm{d}t$

1) Soient p et q deux réels. Rappeler la formule liant $\cos(p) - \cos(q)$ à $\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

2) Démontrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leqslant |u|$.

3) Soient x et y deux réels. Établir que : $|I_f(x) - I_f(y)| \leqslant |x-y| \displaystyle\int_0^1 t|f(t)| \, \mathrm{d}t$.

4) En déduire que la fonction I_f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 4
Montrer que pour $0 < a < b$, on a $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$. <u>Indication</u> : *Cauchy-Schwarz.*
(bonus : peut-on avoir égalité ?)

Exercice 5
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{U})$, et $g : I \to \mathbb{C}$ définie par $g(x) = ib + \displaystyle\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} \, \mathrm{d}t$, où $b \in \mathbb{R}$ est un argument de $f(a)$.

1) Vérifier que g est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

2) Soit $h : I \to \mathbb{C}$ définie par $h(x) = f(x)\exp(-g(x))$. Calculer h' et en déduire h.

3) Montrer qu'il existe une fonction $\theta : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $f = e^{i\theta}$.

Exercice 6
On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.
Déterminer le domaine de définition, la dérivabilité, la dérivée, les variations puis la limite en $+\infty$.

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^x e^{(-(xt)^2)} \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Montrer que f est dérivable et calculer f'.

Exercice 8
Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_x^{3x} \frac{1-\cos t}{t^3} \, \mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\lim_{x \to 1} \int_x^{x^2} \frac{t-1}{(\ln t)^2} \, \mathrm{d}t$

<u>Indication</u> : *Penser aux DL.*

Exercice 9
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T > 0$.

1) On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{x+T} f(t) \, \mathrm{d}t = K$. Montrer que f est T-périodique.

2) Montrer la réciproque.

3) On suppose que f est T-périodique et d'intégrale nulle sur une période. Montrer que F, une primitive de f, est T-périodique. Est-ce toujours vrai en supposant seulement f périodique ?

Exercice 10 (Théorème de Riemann-Lebesgue)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1) Montrer que $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{ist}\,\mathrm{d}t = 0$.

2) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, T-périodique, d'intégrale nulle sur une période.
Montrer que $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \int_a^b f(t)\varphi(st)\,\mathrm{d}t = 0$.

3) On ne suppose plus que φ est d'intégrale nulle. Déduire de la question précédente que

$$\lim_{s\to+\infty} \int_a^b f(t)\varphi(st)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, a, $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_a^{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t} f(u)\,\mathrm{d}u$ est dérivable puis calculer la dérivée.

Exercice 12
Soit $f \in \mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f'(x) \in [0, 1]$ pour tout x, et $f(a) = 0$. On définie la fonction F par

$$F(x) = \int_a^x f^3(t)\,\mathrm{d}t - \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

1) Déterminer les variations de F.

2) Monter que $\displaystyle\int_a^b f^3(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$.

Exercice 13 (*)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement croissante telle que $f(0) = 0$.

1) Pour tout $x > 0$ montrer que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)$ (<u>Indication</u> : *faire un dessin*).

2) En déduire que $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \geqslant ab$, l'égalité se produisant si et seulement si $b = f(a)$.

Exercice 14 (Primitives)
Déterminer des primitives des fonctions suivantes sur des intervalles que l'on précisera :

1) $\dfrac{x^3}{x^4 - 1}$ **2)** $\dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ **3)** $\cos^3 x \sin^2 x$ **4)** $\dfrac{\cos x}{\sin(x) + 1}$

5) $(x^2 + x + 1)\cos(2x)$ **6)** $(2x + 3)\cos x e^{-x}$ **7)** $\dfrac{x + 1}{\sqrt{-x^2 - 3x - 2}}$ **8)** $(x^2 + 1)\ln^2 x$

Exercice 15 (Cours)
Nature des intégrales :

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t$ où $\beta \in \mathbb{R}$ **3)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; **4)** $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$

Exercice 16 (un exemple)
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = 0$ sauf sur les intervalles de la forme $\left[n - \dfrac{1}{2^n}, n + \dfrac{1}{2^n}\right]$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) où la courbe $\mathscr{C}_f$ forme un triangle de hauteur 1.

1) **a)** Faire un dessin du graphe de f entre 0 et 3, puis au voisinage de $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Est-ce que f a une limite en $+\infty$?
Rappel : si $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, alors pour toute suite (x_n) de limite a, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

2) **a)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^{n+\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Soit $X \in \mathbb{R}$. En posant $n = \lfloor X \rfloor$, encadrer $\displaystyle\int_0^X f(t)\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

3) Construire sur ce modèle une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, non bornée au voisinage de $+\infty$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 17
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3+5t^2+1}{2t^4+2t^3+t^2+1}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 18 (Intégrales de Bertrand)
Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on étudie la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$.

1) On suppose $\alpha \neq 1$. Étudier la nature de l'intégrale.

2) Étudier le cas $\alpha = 1$. Conclure.

3) Déduire du cas $\alpha = 1$ la nature de $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de β.

4) Déduire de l'étude précédente la nature de $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}\,\mathrm{d}t$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 19
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)+e^t}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{1-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ **4)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-zt}\,\mathrm{d}t$, où $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ? Si oui, calculer leur valeur.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ **4)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+e^t)(1-e^{-t})}$ **6)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|t|}}\,\mathrm{d}t$ **7)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+t+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ **8)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\cos 2x}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 21
Étudier la convergence des intégrales et l'intégrabilité des fonctions suivantes :

1) $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \left(2i - \frac{1}{x^2}\right) e^{i(x^2)}\,\mathrm{d}x$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin(t^4)\,\mathrm{d}t$

Indication : *Pour le 1), calculer une primitive.*

Exercice 22
On note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que l'intégrale I converge. On pourra s'aider d'une intégration par parties.

2) Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

Indication : *Prouver puis utiliser l'inégalité suivante :* $|\sin t| \geqslant \sin^2 t$.

3) En observant

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t} \, \mathrm{d}t$$

déterminer le signe de I.

Exercice 23
Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable en 0, et que $f(0) = 0$.

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}t$ est convergente.

2) On suppose de plus que $f'(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2} \, \mathrm{d}t$ est divergente.

Exercice 24
Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ continues. On suppose de plus que $f \sim_b g$.

1) On suppose que $\displaystyle\int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t$ converge. Que peut-on dire de $\displaystyle\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$? Montrer que

$$\int_x^b f(t) \, \mathrm{d}t \sim_b \int_x^b g(t) \, \mathrm{d}t$$

Attention ! $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ et $\displaystyle\int_{[a,b[} g$ sont des nombres, des réels bien concrets. Ils sont a priori différents. Il peuvent être égaux, plus grand, plus petit l'un que l'autre ... et c'est tout.

2) On suppose que $\displaystyle\int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t$ diverge. Que peut-on dire de $\displaystyle\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$? Montrer que

$$\int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t \sim_b \int_a^x g(t) \, \mathrm{d}t$$

<u>Indication</u> : *Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe x_1 tel que pour tout $x \geqslant x_1$,*

$$\left| \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t - \int_a^x g(t) \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon \int_a^x g(t) \, \mathrm{d}t$$

Exercice 25 (Restes et sommes partielles)
On cherche à obtenir des équivalent des sommes partielles d'une série divergente ou des restes d'une série convergente, dans le cas des séries de Riemann.
On s'aidera d'une comparaison série / intégrale pour obtenir un encadrement.

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < 1$. Montrer que

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent du reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.