Exercices : Espaces vectoriels normés

1 Normes

Exercice 1 (Normes : $\mathbb{K}^n$)
Soit $E = \mathbb{K}^n$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Notons

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$$

1) Montrer que ce sont des normes.

2) Montrer que, pour tout $x \in E$,

a) $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$ **b)** $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$ **c)** $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$

Exercice 2 (Normes : Matrices)
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Définir des normes 1, 2 et ∞ sur E.

2) Pour $A = (a_{i,j}) \in E$, on pose $\|A\| = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

a) Montrer que $\|.\|$ définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Vérifier

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$$

Exercice 3 (Normes : Espace de fonctions)
Soit $E = \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, avec $a < b$ deux réels.

1) Construire des normes 1 et ∞. Rappeler une norme 2 sur E.

2) Montrer que ce sont des normes. Sur le modèle de l'exercice 1, donner des relations entre elles.

3) Soit $E = \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $f_n \in E$ définie par $f_n(x) = \sqrt{n}x^n$.
Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $\|.\|_1$ et diverge pour $\|.\|_\infty$.Ces normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 4
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Le but de cet exercice est de construire une norme N telle que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$, tende vers $P \in E$ arbitraire.

1) Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$. On pose $N(P) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{|a_n|}{n+1}$.
Montrer que N est bien définie et est une norme sur E. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} X^n$ pour N.

2) Avec les notations précédentes, on pose $N(P) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)|a_n|$. Mêmes questions.

3) Soit $P \in E$ fixé non nul et $d = \deg P$. Montrer que $(1, X, \dots, X^d, X^{d+1} - P, \dots, X^n - P, \dots)$ est une base de E. En déduire une norme $\|.\|$ telle que la suite $(X^n)_n$ converge vers P pour cette norme.

2 Parties : ouverts, fermés, densité, convexité

Exercice 5 (Quelques résultats généraux)
Soit E muni de $\|.\|$ un espace vectoriel normé.

1) Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte non vide est la boule fermée de même rayon ; et que l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même rayon.

2) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\mathring{F} \neq \emptyset \Longrightarrow F = E$.

3) Soit F un fermé de E, et $x \in E$. Montrer que $x \in F \iff d(x, F) = 0$.
En déduire que tout ouvert est réunion dénombrable de fermés (à l'aide de fonctions continues).

Exercice 6 (Espace de fonctions)
Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de $\|.\|_\infty$.

1) Est-ce que $F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 0\}$ est fermé ? Après les fonctions continues : Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, posons $\varphi_x : f \mapsto f(x)$ définie sur E. Montrer que φ_x est 1-Lipschitzienne. En déduire une autre preuve de la question précédente.

2) Montrer que $G = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0\}$ n'est pas ouvert. <u>Indication</u> : *Revenir à la définition.*

3) Soit $\varphi \in E$. On pose, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\varphi = \|\varphi f\|_\infty$. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur φ pour que $\|.\|_\varphi$ soit une norme, puis une norme équivalente à $\|.\|_\infty$.

Exercice 7 (Espace de fonctions)
Soit $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(1) = 1\}$.

1) L'espace E est muni de $\|.\|_\infty$. F est-il fermé ?

2) Même question en munissant E de $\|.\|_1$.
En déduire une autre preuve que ces deux normes ne sont pas équivalentes sur E.

Exercice 8 (Densité)
Soit $E = \ell^1(\mathbb{R}) = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\}$, muni de $\|.\|_1$.
Soit F l'ensemble des suites à support fini : $u = (u_n) \in F \iff \exists n \in \mathbb{N}, \forall k > n, u_k = 0$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Montrer que F est dense dans E.

Exercice 9 (Densité)
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
<u>Indication</u> : *Regarder* $u_k = M + \dfrac{1}{k} I_n$ *et le spectre de* u_k.

Exercice 10 (Convexité)
Parmi les ensembles suivants, préciser, en justifiant, lesquels sont convexes.

1) Les sphères de rayon $r > 0$ dans un espace vectoriel normé E.

2) $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x + y \leqslant 1\right\}$ dans $\mathbb{R}^2$.

3) $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

4) L'ensemble des matrices bistochastiques dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire les $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 , \quad a_{ij} \geqslant 0; \qquad \forall i \in [\![1, n]\!] , \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1; \qquad \forall j \in [\![1, n]\!] , \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$$

5) Soit A une partie convexe de $(E, \|.\|)$ espace vectoriel normé. Montrer que $\bar{A}$ et $\mathring{A}$ sont convexes. <u>Indication</u> : *Pour* $\bar{A}$*, utiliser la caractérisation séquentielle. Pour* $\mathring{A}$*, faire un dessin avec* $r = \min(r_a, r_b)$.

3 Fonctions continues et applications

Exercice 11 (Matrices)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $(A^k)_k$ converge vers M. Montrer que M est la matrice d'un projecteur.

Exercice 12 (Matrice stochastiques)
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique : tous ses coefficients sont positifs, et la somme des coefficients de chacune de ses lignes vaut 1.

1) On munit $\mathbb{C}^n$ de $\|.\|_\infty$. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, $\|MX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$.

2) En déduire que tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ est de module au plus 1. Puis que $\rho(M) = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} |\lambda| = 1$.

Le théorème de Perron Frobenius prouve que, sous les bonnes hypothèses (par exemple si les coefficients de M sont tous strictement positifs), 1 est valeur propre de multiplicité 1 et les autres valeurs propres sont de module strictement plus petit. On se placera dans ce cadre pour la suite de l'exercice.

3) On admet la décomposition de Dunford : $M = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente qui commutent.
Montrer que $(M^k)_k$ converge.

4) On considère un vecteur $V_0 \in \mathbb{R}^n$ à coefficients positifs tel que la somme de ses coefficients soit égale à 1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $V_k = M^k V_0$ vérifie aussi cette propriété. Puis que la suite (V_k) converge vers $W \in \mathbb{R}^n$, vecteur propre pour la valeur propre 1 vérifiant la même propriété que V_0. On montrera l'unicité de W.

On pourra faire le lien avec l'exercice de probabilité sur les chaînes de Markov.

Exercice 13 (Ouverts, fermés, en dimension finie)
Parmi les ensembles suivants, préciser, en justifiant, lesquels sont des ouverts et lesquels sont des fermés. Précisez lesquels sont bornés.
$(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie.

1) $\{x \in E \mid \|x - a\| \geqslant 2\}$

2) $\{x \in E \mid \|x - a\| > 5/3\}$

3) F sous-espace vectoriel de E,

4) $]0,1[$, $[0,1[$, $[0,1]$ et $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$

5) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 5z^2 = 1\}$

6) $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ et $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 14 (Ouverts, fermés : matrices)
Dans cet exercice, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme $\|.\|$.

1) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15 (Ouverts, fermés — CCP PC 2015 Exo 2)
Soit $E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 2 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \right\}$.

1) Trouver une condition nécessaire et suffisante simple sur x et y pour que (x,y) appartienne à E.

2) Montrer que E est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 16 (Continuité)
On définit la fonction
$$f : \begin{array}{ccc} [0,1] \times [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leqslant y \\ y(1-x) & \text{si } y < x \end{cases} \end{array}$$

1) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, exprimer $\max(x,y) + \min(x,y)$ et $\max(x,y) - \min(x,y)$ en fonction de x et y.
En déduire que max et min sont des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est continue sur $[0,1] \times [0,1]$

3) Montrer que f admet un maximum et un minimum sur $[0,1] \times [0,1]$, les déterminer.

Exercice 17 (Suites)
Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \to E$ une application k-lipschitzienne.

1) Montrer que f admet au plus un point fixe si $k < 1$.

2) On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que f admet un point fixe $\ell \in E$.

  a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell)$.

  b) Si $k < 1$, que peut-on dire de la suite (u_n) ?

3) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $X \to AX$ soit k-lipschitzienne avec $k < 1$. Soit $B \in \mathbb{R}^n$. Résoudre $X = AX + B$ à l'aide d'une suite $(X_n)_n$.

Exercice 18 (Continuité)
Étudier les limites en $(0,0)$ des applications définies pour $(x,y) \neq (0,0)$ de la façon suivante :

$$f : (x,y) \mapsto \frac{(x^2+xy+y^2)^2}{x^2+y^2} \qquad g : (x,y) \mapsto \frac{xy}{x^4+y^4} \qquad \text{et} \qquad h : (x,y) \mapsto \frac{xy}{2x^2+y^2}$$

Exercice 19 (Continuité)
La fonction suivante est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$: $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 20 (Fermés bornés)
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie

1) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe x_0 vecteur unitaire tel que $\|u(x_0)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

2) Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $x \in E$.
Montrer que la distance $d(x,F) = \inf\limits_{y \in F} \|x-y\|$ existe et est atteinte.
Application : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f-Q\|_\infty = \inf\limits_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \|P-f\|_\infty$.

3) Soit K fermé borné de E. $f : K \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\forall x \in \mathbb{K},\ f(x) > 0$.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{K},\ f(x) \geqslant \alpha$.