Exercices : Calcul différentiel

Exercice 1
Soient $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne, et $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable, telle que $t \mapsto \|f(t)\|$ soit constante sur I. Montrer que, pour tout $t \in I$, $f(t) \perp f'(t)$.

Exercice 2
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, posons

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & x & 1 \\ x^n/n! & \cdots & \cdots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$$

1) Montrer que D_n est dérivable et, pour $n \geqslant 2$, exprimer D_n' en fonction de D_{n-1}.

2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$.

Exercice 3
Soit $E = \mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$, et $M : I \to E$ dérivable vérifiant : $\forall t \in I$, $M(t)^T M(t) = I_{2n+1}$.

1) Montrer que, si $A \in E$ est antisymétrique (i.e. $A^T = -A$), alors $A \notin GL_{2n+1}(\mathbb{R})$.

2) En déduire que, pour tout $t \in I$, $M'(t) \notin GL_{2n+1}(\mathbb{R})$.

Exercice 4 (Continuité et dérivées selon un vecteur)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f admet une dérivée selon tout vecteur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ en $(0,0)$.

2) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 5 (Composition)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, et $g(t) = f(2t, 1+t^2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Déterminer g'.

Exercice 6 (Extrema)

1) Soit $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - (x-y)^2$ définie sur $\overline{D(0,1)}$, le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur son ensemble de définition, puis étudier ses extrema.

2) Soit $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy - y^3$ définie sur $[0,1]^2$. Mêmes questions.

Exercice 7 (Extrema)
Soit $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0 \quad \text{et} \quad x + y \leqslant 1\}$, et $f : T \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy(1-x-y)$.

1) Montrer que T est fermé, borné. Bonus : montrer que T est convexe.

2) Montrer que f admet un maximum, et le déterminer.

Exercice 8 (Extrema)
Déterminer les éventuels extrema sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

2) $f(x,y) = x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 4y$

Exercice 9 (Hessienne)
Soit $E = \mathbb{R}^n$ euclidien, et $(a,b) \in E^2$. Posons

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = \langle a, x\rangle \langle b, x\rangle$$

1) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$. Déterminer la matrice hessienne en tout point.

2) En déduire qu'il existe $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx$ pour tout $x \in E$.

Exercice 10

1) Montrer que l'ensemble E_a des applications f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(tx,ty,tz) = t^a.f(x,y,z)$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$.

2) Montrer que, si $f \in E_a$ est $\mathcal{C}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in E_{a-1}$.

3) Montrer que pour tout $f \in E_0$, $f(x,y,z) = f(0,0,0)$. Que peut-on en déduire sur E_0 ?

4) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$, telle que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = af(x,y,z).$$

Montrer que g, donnée par $g(t) = f(tx,ty,tz) - t^a.f(x,y,z)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $tg' = ag$. En déduire que $f \in E_a$.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 11

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Soit Φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \Phi(x,y) = P(x+iy)$$

De plus, on définit $f(x,y) = \Re(\Phi(x,y))$ et $g(x,y) = \Im(\Phi(x,y))$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1) Montrer que Φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

2) Montrer que Φ est $\mathscr{C}^2$ et harmonique sur $\mathbb{R}^2$ ($\Delta\Phi = 0$).