CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

L'objet de ce problème est d'étudier les éventuelles solutions de l'équation :

$$\ln(x) = ax \qquad (E_a)$$

où $a \in \mathbb{R}$ est fixé et $x > 0$ est l'inconnue.

Partie I. Etude de l'équation (E_a)

1. On se fixe, dans cette question, un réel a quelconque.
   (a) Montrer que si $a \in]-\infty, 0]$, l'équation (E_a) admet une unique solution $\alpha \in]0, 1]$.
   (b) Montrer que si $a \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$, l'équation (E_a) admet exactement deux solutions α et β vérifiant $\alpha \in]1, e[$ et $\beta \in]e, +\infty[$.
   (c) Montrer que si $a = \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) admet une unique solution dont on donnera la valeur.
   (d) Montrer que si $a > \frac{1}{e}$, l'équation (E_a) n'admet pas de solution.
2. Illuster sur quatre graphiques différents les cas où $a \in]-\infty, 0]$, $a \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$, $a = \frac{1}{e}$ et $a > \frac{1}{e}$ (on représentera la fonction logarithme ainsi que la droite d'équation $y = ax$).

Partie II. Etude d'une équation fonctionnelle

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y) \qquad \text{(R)}$$

où l'inconnue est une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe exactement deux fonctions constantes sur $\mathbb{R}$, que l'on précisera, solutions de (R).
2. Soit φ une solution de (R). Montrer que :

$$\varphi(0) = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 0.$$

3. Soit φ une solution de (R) vérifiant $\varphi(0) \neq 0$.
   (a) Donner la valeur de $\varphi(0)$ et montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) > 0$.
   (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(nx) = (\varphi(x))^n.$$

(c) Montrer que
$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(1) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m.$$

(d) Déduire des questions précédentes que
$$\forall (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad \varphi\left(\frac{n}{m}\right) = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}}.$$

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $x_n = \lfloor 10^n x \rfloor 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers x ($\lfloor \cdot \rfloor$ désignant la fonction partie entière).

(f) Conclure que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = (\varphi(1))^x.$$

Partie III. Etude d'une suite de polynômes

On considère pour la suite de ce problème la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$P_n(X) = \frac{1}{n!}X(X+n)^{n-1}.$$

1.(a) Expliciter les polynômes P_1 et P_2.

(b) Donner la valeur de $P_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n^{'}(x) = P_{n-1}(x+1).$$

3. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y)$$

(on pourra procéder par récurrence sur $\mathbb{N}$).

Partie IV. Retour sur l'équation (E_a)

Dans cette partie on note α_a **la plus petite** solution, si elle existe, de l'équation (E_a).

1.(a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad (x+n)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^x n^{n-1}$.

(b) Rappeler la formule de Stirling puis montrer que, pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$ fixés, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} P_n(x)a^n$ converge absolument si et seulement si $|a| \leq \dfrac{1}{e}$.

2. Dans cette question on se fixe un réel a de $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ et on note F_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)a^n.$$

(a) Montrer que F_a est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Rappeler le résultat de cours sur le produit de Cauchy de deux séries.

(c) En utilisant les résultats de la partie III., montrer que F_a est solution de (R) et en déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a(x) = (F_a(1))^x.$$

(d) Montrer que F_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a^{'}(x) = aF_a(x+1).$$

(e) En calculant $F_a^{'}(0)$ de deux façons différentes, montrer que $F_a(1)$ est solution de (E_a).

3. On note G la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$ par $G(a) = F_a(1)$.

(a) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}[$ et monotone sur $[0, \frac{1}{e}]$.

(b) Expliciter $G\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right)$, l'image de l'intervalle $\left[0, \frac{1}{e}\right]$ par la fonction G.

(c) Conclure que

$$\forall a \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right], \quad F_a(1) = \alpha_a.$$

4. Soit C un réel tel que $1 \leq C \leq e^{\frac{1}{e}}$. Montrer que l'équation $y^y = C$, d'inconnue $y > 0$, admet une unique solution y_0 et que

$$y_0 = 1 + \ln(C) + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)^{n-1}}{n!} (\ln(C))^n.$$

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1142 – D'après documents fournis

Épreuve de Mathématiques B PC 2018

Présentation de l'épreuve (durée 3h)

Le sujet porte sur l'étude des éventuelles solutions de l'équation $\ln(x) = ax$, a étant un paramètre réel ; pour un certaine plage du paramètre a on établit une formule qui exprime la plus petite solution de l'équation en tant que série entière du paramètre a. Cette formule a une longue histoire, inspiré par des travaux de Lambert de 1758, elle est découverte par Euler en 1779, puis redécouverte/redémontrée successivement par Eisenstein en 1844 et Jensen en 1902.
Le problème est divisé en quatre parties, la première partie étudie l'existence de solutions de l'équation $\ln(x) = ax$, la deuxième porte sur la résolution de l'équation fonctionnelle très classique $f(x + y) = f(x)f(y)$, la troisième partie étudie une suite de polynômes (polynômes d'Abel) et la dernière partie, plus longue, établit la formule mentionnée précédemment.

Commentaire général de l'épreuve

Le sujet n'étant pas trop long, toutes les parties ont été abordées. Le sujet fait appel à des connaissances diverses du programme d'analyse avec plus précisement des connaissances du programme de première année pour les trois premières parties et de deuxième année pour la dernière partie. Les candidats ayant des bases solides d'analyse s'en sont bien sortis ce qui a donné de bonnes, voire très bonnes copies. Le bilan est cependant, en moyenne, plus mitigé et parfois décevant avec des faiblesses surprenantes sur des notions basiques d'analyse notamment sur celles du programme de première année qui devraient être maitrisées en fin de deuxième année.
Le jury a constaté dans un nombre important de copies un "papillonage" alors que de très nombreuses questions nécessitent une imprégnation totale de l'énoncé. Dans la mesure où le sujet est relativement court, mieux vaut se limiter à traiter une moitié/deux tiers du sujet quitte à réserver un peu de temps en fin d'épreuve pour grapiller des points.
Les correcteurs ont déploré très peu de copies mal soignées et soulignent les efforts de présentation et de rédaction.

Analyse par parties

Partie 1

Une partie assez simple à condition de faire avec précision l'étude des fonctions auxiliaires ce qui a été fait par une moitié des candidats, trop peu comprennent qu'il fallait utiliser un théorème fondamental et précis (peu importe le nom qu'on lui donne si la référence est bien claire). La continuité sur un intervalle et la stricte monotonie étant des arguments essentiels et souvent très diffus.

La dernière question concernant les représentations graphiques de la fonction ln et des droites d'équation $y = ax$ a été globalement bien faite mais a quand même posé des difficultés à une proportion non négligeable de candidats qui n'ont pas su représenter correctement les fonctions ou ont simplement passé la question.

Partie 2
Une deuxième partie très détaillée où les résultats attendus sont clairement énoncés. De la précision était attendue, tant pour effectuer les récurrences nécessaires que pour la bonne gestion des cas particuliers.
La stricte positivité de la fonction φ a été rarement bien traitée (question 3.a). A la question 3.b. beaucoup de candidats font une récurrence sur $\mathbb{Z}$. La fin n'est que rarement correcte, la continuité de la fonction et la convergence de la suite utilisée rarement bien dégagées.

Partie 3
Une troisième partie simple au début a été correctement traitée par les candidats, la dernière question plus difficile a été très rarement réussie.

Partie 4
Une quatrième partie qui utilisait plus nettement les notions de deuxième année, et qui révèle les capacités des candidats. L'équivalent demandé a la question 1.a. a été assez bien traité. Pour la question 1.b., la formule de Stirling est connue mais la convergence absolue de la série n'a pas été bien traitée, on se perd souvent sur l'usage des paramètres : série entière en a (avec un rayon de convergence) ou série de fonction en x ou simplement série numérique ? Le cas $a = \frac{1}{e}$ est en particulier rarement bien traité. De même, la question suivante où l'on doit étudier la continuité d'une série de fonctions est très rarement réussie.
Le produit de Cauchy est rarement bien cité et à la question 2.c. les candidats se précipitent vers le résultat demandé en omettant les arguments nécessaires. Le caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction F_a est là encore rarement correctement traité ; la suite a été assez peu abordée.
Dans l'ensemble les questions 1.b., 2.a. et 2.d. ont été décevantes, ce sont des questions tout à fait standard (convergence de série, continuité d'une série de fonction et caractère $\mathcal{C}^1$ d'une série de fonctions) auxquelles les étudiants sont préparés en deuxième année de cursus.

Conseils aux futurs candidats

- ne pas négliger certains chapitres du programme notamment ceux de première année qui peuvent ne pas avoir été revus en deuxième année.
- ne pas "papillonner" et prendre le temps de s'imprégner du sujet surtout si celui-ci est de longueur raisonnable.
- les correcteurs encouragent fortement la bonne présentation ainsi que la qualité de la rédaction des copies, un nombre de points non négligeable leur est consacré. Sont sanctionnées, par exemple, les copies dont les résultats ne sont pas soulignés, les copies comportant des fautes d'orthographes ou bien celles dont la rédaction est trop elliptique.

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercices

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne la matrice identité de taille (n, n) par I_n.

Soit $\mathbb{R}^n$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n muni du produit scalaire canonique :
Pour tous $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On note $\vec{u} = (1, 1, ..., 1)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1 et F le sous-espace vectoriel formé par l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$.

1. Démontrer que F est l'ensemble des vecteurs $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

2. Quelle est la dimension de F ?

On considère A_n la matrice de taille (n, n) définie par :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a des 0 comme coefficients diagonaux et des 1 partout ailleurs.

3. Enoncer précisément le théorème spectral. Que peut-on en conclure pour la matrice A_n ?

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ est dans F. Calculer $A_n X$ en fonction de X.

5. Déterminer les valeurs propres de A_n et, pour chacune de ses valeurs propres, le sous-espace propre associé.

6. Calculer le déterminant de la matrice A_n.

On considère B_n la matrice de taille $(2n, 2n)$ définie par blocs par :

$$B_n = \begin{pmatrix} A_n & I_n \\ I_n & A_n \end{pmatrix}.$$

---

7. La matrice B_n est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

8. Soit α une valeur propre de la matrice B_n. Démontrer que α est une valeur propre de $(A_n + I_n)$ ou $(A_n - I_n)$.

9. En déduire que les valeurs propres de B_n sont dans l'ensemble $\{-2, 0, n-2, n\}$.

10. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de B_n.

Soit M une matrice de taille (n, n). On lui associe U_M, la matrice de taille $(2n, 2n)$ définie par

$$U_M = \begin{pmatrix} M & I_n \\ I_n & M \end{pmatrix}.$$

12. On suppose M diagonalisable. On note $\alpha_1, ..., \alpha_r$ les valeurs propres distinctes de M. Déterminer les valeurs propres de U_M en fonction de $\alpha_1, ..., \alpha_r$.

13. La matrice U_M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

On admet l'égalité $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On définit pour tout entier naturel non nul n, $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On introduit les séries entières :

$$H(x) = \sum_{n\geq 1} h_n\, x^n, \quad S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\, x^n \text{ et } T(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{h_n}{n}\, x^n.$$

On note I l'intervalle (ouvert) de convergence de la série H.

1. Soit n un entier naturel non nul. Justifier $h_{2n} - h_n \geq \dfrac{1}{2}$.

2. Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série H. En déduire I.

4. Déterminer les rayons de convergence des séries S et T.

5. Quel est le développement en série entière de la fonction $(g : x \mapsto \ln(1-x))$? Préciser son rayon de convergence.

6. Justifier que la fonction $(G : x \mapsto \ln(1-x)/(1-x))$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$. Etablir une relation entre G et H.

Soit L la primitive de H sur l'intervalle I telle que $L(0) = 0$.

7. Exprimer L à l'aide de la fonction $(g : x \to \ln(1-x))$.

8. Justifier que L est développable en série entière et expliciter son développement en série entière. On énoncera précisément le théorème utilisé.

9. En déduire une relation entre $T - S$ et L.

10. Soit y dans $]0,1[$

    (a) Justifier que $\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\, du$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :
$$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}\, du + S(y) = 0$$
    On pourra utiliser le développement en série entière de la fonction $(x \mapsto \ln(1-x))$.

    (b) Justifier que $\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\, du$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :
$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\, du = -\frac{\pi^2}{6}$$

    (c) Justifier que
$$\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y)$$

11. Exprimer la valeur de $T(\frac{1}{2})$ en fonction de π. Justifier votre réponse.

Exercice 3

On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. Pour tous k, n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

On pourra utiliser le fait que : $S_2(n) = n(n+1)(2n+1)/6$.

1. Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Justifier que la suite $(\frac{1}{n^{k+1}} S_k(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{k+1}$.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance et $\mathbf{V}(X)$ sa variance. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, N]\!]$, Démontrer que

$$\mathbf{E}(X) \ = \ \sum_{i=1}^{N} P(X \geq i).$$

On dispose d'une boîte dans laquelle sont placés des jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à N. Soit k un entier naturel ≥ 2. On tire k fois de suite un jeton dans cette boîte. On note son numéro et on le remet dans la boîte. Les tirages sont indépendants les uns des autres. On note X_i la variable aléatoire qui prend comme valeur le numéro du jeton du i-ème tirage, pour i dans $[\![1, N]\!]$. On suppose que la loi de X_i est uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On note U_k et V_k les variables aléatoires :

$$U_k = \min(X_1, ..., X_k) \ \text{ et } \ V_k = \max(X_1, ..., X_k).$$

3. Exprimer $\mathbf{E}(X_1)$, $\mathbf{E}(X_1^2)$ et $\mathbf{V}(X_1)$ en fonction de N.
4. On se propose de simuler en Python les variables V_k pour $N = 10$.
   (a) Ecrire une fonction `simulX` qui renvoie une liste de longueur 100 de réalisations des variables $X_1, ..., X_{100}$. On pourra utiliser la fonction : random.randint L'instruction random.randint(1,10) fournit un nombre entier aléatoire dans $[\![1, 10]\!]$ uniformément.
   (b) En déduire une fonction `REALIV` qui renvoie une liste de longueur 100 de réalisations des variables $V_1, ..., V_{100}$.

5. Soit k dans $\mathbb{N}^*$ supérieur à 2.

   (a) Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Justifier que :

$$P(U_k \geq i) = \left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k.$$

   (b) On appelle plusieurs fois la fonction `REALIV` de la question 4b. On constate qu'à chaque fois, le résultat obtenu est une liste qui se termine par un grand nombre de 10. Justifier mathématiquement ce résultat.

   (c) Exprimer $\mathbf{E}(U_k)$ en fonction de N à l'aide de la fonction S_k introduite au début de l'exercice. Donner un équivalent de $\mathbf{E}(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

6. (a) On introduit les variables $Y_i = N + 1 - X_i$, pour i dans $[\![1, N]\!]$. Justifier que les variables $(Y_1, ..., Y_n)$ sont indépendantes et de même loi. Préciser cette loi.

   (b) En déduire $\mathbf{E}(V_k)$ et $\mathbf{V}(V_k)$ en fonction de $\mathbf{E}(U_k)$ et $\mathbf{V}(U_k)$.

7. On considère le couple de variables aléatoires (U_2, V_2).

   (a) Exprimer $U_2 + V_2$ et $U_2 V_2$ en fonction de X_1 et X_2.

   (b) En déduire $\mathbf{V}(U_2 + V_2)$ et $\mathbf{E}(U_2 V_2)$ en fonction de N.

   On peut déduire par un calcul la covariance de U_2 et V_2, notée $\mathbf{Cov}(U_2, V_2)$. On admet sa valeur :

$$\mathbf{Cov}(U_2, V_2) = \frac{(N^2-1)^2}{36N^2}.$$

   (c) Exprimer $\mathbf{V}(U_2)$ et $\mathbf{V}(V_2)$ en fonction de N.

   (d) On note $\rho_2(N)$ le coefficient de corrélation de U_2 et V_2. Exprimer $\rho_2(N)$ en fonction de N.

   (e) Que peut on dire de la suite $(\rho_2(N))_{N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}}$ lorsque N tend vers $+\infty$?

8. (a) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, démontrer que $\mathbf{E}(X^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (2i-1) P(X \geq i)$.

   (b) Exprimer $\mathbf{E}(U_k^2)$ en fonction de N à l'aide des fonctions S_k et S_{k+1} introduites au début de l'exercice.

   (c) Exprimer $\mathbf{V}(U_k)$ en fonction de N à l'aide des fonctions S_k et S_{k+1} introduites au début de l'exercice.

   (d) Donner un équivalent de $\mathbf{V}(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Rapport sur l'epreuve de Mathématiques 1 PC

Présentation du sujet

L'épreuve consiste en trois exercices indépendants sur des thèmatiques différentes du programme (algèbre, analyse, probabilités). Le premier exercice est un exercice de réduction, il étudie le spectre de certaines matrices construites par blocs en partant de cas particuliers. Le deuxième exercice étudie les relations entre différentes séries entières dont les coefficients sont en relation avec la suite harmonique (en particulier la fonction dilogarithme). Le troisième est un exercice qui étudie les moments et la corrélation entre le maximum et le minimum de tirages uniformes indépendants dans un ensemble fini.

Commentaire général de l'épreuve et Analyse générale

Les sujets de chacun des exercices sont conçus pour être progressifs, avec des questions élémentaires, et de vérification des connaissances (concepts et théorèmes du programme), puis des questions plus difficiles. Il n'est pas attendu des candidats qu'ils traitent l'intégralité de chaque exercice et aucun ne l'a fait. Ce sont les calculs élementaires bien menés, les questions de cours classiques , la logique de l'argumentation qui trient les copies, plus que les questions techniques abordées seulement dans quelques très bonnes copies. Des notes très correctes peuvent être obtenues en traitant correctement et précisément les questions élémentaires. Les correcteurs ont apprécié le soin apporté à l'écriture et à la présentation dans la plupart des copies, mais il reste néanmoins quelques copies particulièrement difficiles à déchiffrer.

Analyse des résultats par exercices

- Le premier exercice a été correctement abordé dans la majorité des copies. L'énoncé du théorème spectral a posé de nombreuses difficultés, l'énoncé étant souvent incomplet (oubli de la base orthonormée par exemple). Les questions 4,5 et 6 sont souvent plutôt bien traitées, mais les candidats ne voient pas le lien entre la question 4 et la question 5, et font le calcul du polynôme caractéristique. Les calculs de déterminant par bloc montrent des confusions entre objets de natures très différentes. La fin de l'exercice 1 est rarement traitée de façon significative.
- Dans le second exercice, peu de candidats ont fait le lien entre la question 1 et la question 2. Ceux qui ont démontré la divergence de la suite $(h_n)_n$ ont souvent utilisé une comparaison avec une intégrale. Les questions sur les rayons de convergence de séries entières et

développements en séries entières sont bien réussies dans une majorité de copies. En revanche, la convergence des intégrales proposées a posé plus de problèmes. Les questions 10b et 10c sont rarement traitées avec la précision nécessaire (passages à la limite non justifiés le plus souvent.)

- L'exercice 3 est peu réussi. Seules les questions 3,4,5 et 7a, 7b ont été abordées par une part significative de candidats. L'espérance et surtout la variance de la loi uniforme ne sont pas bien connues. L'indépendance de variables aléatoires est un argument qui peine à être cité. On lit des confusions entre les variables et leurs lois de probabilités. Les questions d'informatique sont plutôt très bien traitées, à part des erreurs dans les indexations de listes.

Conseil aux futurs candidats

- Nous conseillons aux futurs candidats de bien connaître leurs cours, de le citer précisément lorsqu'on l'utilise et d'en vérifier soigneusement les hypothèses.
- Des petits calculs, des études de cas particuliers sont proposés pour s'approprier l'exercice. Ils méritent attention et doivent être traités avec soin.
- Soignez globalement votre travail : présentation, argumentation, code.

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

L'épreuve est constituée d'un problème dont les trois parties sont relativement indépendantes.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Partie I

I. 1) a) Calculer $f(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{-ts}\,ds$ pour $t \in \mathbb{R}$, si $t = 0$ puis $t \neq 0$.

b) Montrer que f est une application continue sur $\mathbb{R}$ et établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

c) Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

I. 2) Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $S(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

a) Montrer que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

b) Justifier l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n!)} = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt.$

I. 3) a) Pour tout $x > 0$, justifier l'existence de $R(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$

b) On pose $\gamma = S(1) - R(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$. Justifier l'égalité :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,dt.$$

c) Montrer que R est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donner une relation entre $R'(x)$ et $S'(x)$ pour $x > 0$ et justifier que :

$$S(x) = R(x) + \ln(x) + \gamma.$$

I. 4) a) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit : $g_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t}{t}\,dt.$

Pour tout $x \in]0,1[$, justifier l'existence de $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} - \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t}\,dt$

et prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant g_n(x) - g(x) \leqslant \dfrac{x^n}{n}$.

b) Prouver que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $]0,1[$.

c) En admettant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g_n(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x)$, montrer que :

$$\gamma = S(1) - R(1) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right).$$

I. 5) Soient $a > 0$ et $b > 0$. En utilisant $R(ax) - R(bx)$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt.$

I. 6) a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $R(x) \leqslant \dfrac{e^{-x}}{x}$, puis que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0$.

b) Au moyen d'une intégration par parties, prouver que R est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\int_0^{+\infty} R(x)\,dx = 1.$$

Partie II

II. 1) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$.

b) Justifier que $I_{n+1} = (n+1)I_n$. En déduire la valeur de I_n.

II. 2) On considére l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes réels de degré $\leqslant 2$.
À tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on associe $T(P)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t)\, dt.$$

a) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.

b) Étudier si M est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

II. 3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré $\leqslant n$. On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ associant à tout polynôme P son polynôme dérivé P'.

a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer des réels $b_0(x), \ldots, b_n(x)$ tels que $P(x+t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k b_k(x)$. *Indication: On pourra citer et utiliser une formule de Taylor.*

b) À tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on associe $T(P)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(x+t)\, dt.$$

Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on ait : $T(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k D^k(P)$.

c) Déterminer les éléments propres de T (valeurs propres et vecteurs propres).

II. 4) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue et bornée. Déterminer $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $\quad y' - y + g = 0$.

Justifier que la solution générale est de la forme : $y : x \mapsto ke^x + e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} g(t)\, dt,\ k \in \mathbb{R}$.

II. 5) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée et soit $N_\infty(g) = \sup\{|g(t)|, t \in \mathbb{R}\}$.

a) On définit $T_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad T_g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} g(t+x)\, dt$.

Justifier qu'alors $T_g(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-u} g(u)\, du$, et que T_g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en précisant $(T_g)'$ en fonction de T_g et g.

b) En supposant g non nulle, déterminer s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T_g = \lambda g$.

c) Montrer qu'en général T_g est bornée sur $\mathbb{R}$ et majorer $N_\infty(T_g)$ au moyen de $N_\infty(g)$.

d) Montrer que si g tend vers 0 en $+\infty$, alors T_g aussi.
Indication : on vérifiera que si $|g(t)| \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant A$, alors $|T_g(x)| \leqslant \varepsilon$ pour $x \geqslant A$.

II. 6) a) Pour tout réel A, justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_A^{+\infty} e^{(i-1)t}\, dt$.

b) Soit $c : t \mapsto \cos(t)$, $s : t \mapsto \sin(t)$ et F le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par (c, s).

Montrer que $g \mapsto T_g$ (où T_g défini ci-dessus) définit un endomorphisme de F et écrire sa matrice N dans la base (c, s). N est-elle diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$?

Partie III

On s'intéresse dans cette partie à l'équation différentielle : $\qquad xy''+y'-(x+1)y=1.$

III. 1) On suppose qu'il existe une solution θ développable en série entière de cette équation différentielle. On note alors $\theta(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r,r[$ où $r>0$ est le rayon de convergence et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

a) Déterminer alors une relation entre a_1 et a_0, ainsi qu'une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Pour une telle suite (a_n), montrer qu'il existe $K>0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |a_n| \leqslant \frac{K}{n!}.$$

En déduire qu'une telle solution θ existe et que de plus $r=+\infty$.

III. 2) On souhaite résoudre ici cette équation difffentielle sur l'intervalle $I=\mathbb{R}_+^*$ et l'on note :

$$\mathcal{S}=\{y \in C^2(I,\mathbb{R})/ \quad \forall x>0, \quad xy''(x)+y'(x)-(x+1)y(x)=1 \quad \}.$$

a) Pour tout $y \in C^2(I,\mathbb{R})$, on pose $z(x)=e^{-x}y(x)$ pour tout $x>0$.
Montrer que $y \in \mathcal{S}$ si et seulement si z vérifie :

$$\forall x>0, \quad xz''(x)+(2x+1)z'(x)=e^{-x} \qquad (\star).$$

b) Déterminer les $Z \in C^1(I,\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x>0, \quad xZ'(x)+(2x+1)Z(x)=0.$$

c) Déterminer les $Z \in C^1(I,\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x>0, \quad xZ'(x)+(2x+1)Z(x)=e^{-x}.$$

d) En déduire l'expression des fonctions $z \in C^2(I,\mathbb{R})$ vérifiant l'équation $(\star)$ de **III.2.a)**, en utilisant la fonction R définie pour $x>0$ par $R(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$: *On utilisera $R(x)$ et $R(2x)$.*

e) Donner alors l'expression de la solution générale $y \in \mathcal{S}$.

III. 3) a) Sachant que $R(x)=-\ln(x)+\gamma+o(1)$ quand $x \to 0$ avec $x>0$, déterminer les solutions $y \in \mathcal{S}$ ayant une limite finie en 0.

Exprimer alors ces solutions en utilisant la fonction S de la partie **I** et reliée à R par : $\quad S(x)=R(x)+\ln(x)+\gamma \quad$ pour $x>0$ (vu en **I. 3) c)**).

b) Sachant que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donner l'expression des solutions f de la question **III. 1)**: on exprimera $f(x)$ en fonction de $S(x)$ et $S(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comment pourrait-on alors obtenir une expression des suites (a_n) de **III.1)** ?

•• FIN ••

Épreuve de mathématiques II. (PC- e3a 2017)

1. Présentation

2150 candidats dont 1965 ont composé, avec une moyenne de $9,23$ et un écart-type de $4,41$.

L'épreuve concernait essentiellement à étudier des intégrales et un opérateur intégral avec quelques questions d'algèbre linéaire ou sur les équations différentielles. Le problème comportait nombre de questions avec des difficultés variées.

2. Commentaires

Le niveau d'ensemble constaté est plutôt moyen voir faible, avec très peu de très bonnes copies, la plupart des candidats cherchant à répondre aux questions tant bien que mal et pas toujours avec les méthodes attendues. On s'inquiète aussi d'un nombre important de candidats à qui semblent manquer des bases nécessaires et en empilent leurs réponses sans toujours donner le sentiment d'une compréhension des choses écrites.

Un nombre donc trop important de copies plutôt faibles et relativement courtes, ce qui conduit à un certain étonnement compte-tenu des questions très classiques et du large spectre du programme balayé par le sujet. Sur la forme, présentation et la rédaction sont globalement convenables et la plupart des candidats connaissent la marche à suivre, mais il reste trop de copies mal présentées, mal numérotées, avec une présentation confuse et en particulier sans référence au numéros des questions. Insistons sur le fait qu'une copie est un texte destiné à convaincre,. Que pour cela il faut introduire la question, la démarche mise en oeuvre et les arguments et des raisonnements précis avec la concentration nécessaire pour faire des calculs corrects.

Beaucoup de fautes en analyse : ainsi sur la convergence des intégrales ("la fonction tend vers 0 en $+\infty$ donc l'intégrale existe"), la confusion entre intégrale dépendant d'un paramètre et dépendant de ses bornes avec la notion fondamentale de primitive mal appréhendée ; la notion de fonction développable en série entière ("la fonction est bijective donc développable", "elle est continue donc développable"), la manipulation d'intégrales divergentes et les intégrations par parties vraiment malhonnêtes (combien ont écrit $\ln(0)$!), la notion de convergence uniforme Des erreurs sur la suite (I_n), censée être géométrique et l'intégrale $R(x)$, "majorée par son premier terme négligé" pour justifier que $R(x) \leq \dfrac{e^{-x}}{x}$.

L'algèbre linéaire a été moins maltraitée : beaucoup d'efforts ont été déployés pour prouver le caractère "endomorphisme" dans II et la bonne matrice a souvent été trouvée. Les équations différentielles aussi ont eu plus de succès : la formule donnant les solutions d'une équation homogène, la méthode de variation de la constante semblent en général assimilées.

3) Analyse des résultats

Partie I

1. (a) Quelques erreurs sur la détermination d'une primitive de $s \mapsto e^{-st}$ pour $t \neq 0$.

   (b) La continuité en 0 est effectuée, mais pas de phrase pour l'évoquer ailleurs. Il est curieux qu'après avoir explicité f, trop de candidats 'utilisent le théorème de continuité sous le signe intégrale avec la majoration fausse :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall s \in [0,1], \quad e^{-st} \leqslant e^{-s}.$$
   Peu voient d'ailleurs que sur un segment, majorer par une constante suffit. La bijection est rarement bien justifiée, certains étudient le noyau ou donnent des explications fantaisistes. La monotonie est rarement expliquée avec l'intégrale directement, ou quitte à dériver sous le signe intégral…

   (c) Question généralement réussie car le développement en série entière de *exp* est connu, mais ensuite cela peut se gâter. Des erreurs de « mélange » entre variables (la fonction obtenue dépend parfois de t) et peu de justification pour intégrer la série entière.

   (d) Question généralement réussie lorsque la précédente l'est (quelques tentatives de bluff néanmoins pour compenser des décalages d'indices aux questions précédentes).

2. (a) Parfois très long, pour un résultat qui dépend de t et x...

3. (a) Souvent correct.

   (b) Parfois très bien faite mais les copies moyennes utilisent des termes du type $\displaystyle\int_0^1 dt/t$. Le caractère C^1 de f est souvent justifié avec le théorème de dérivation des intégrales à paramètres qui donne, dans quelques copies, une dérivée nulle. La présence du signe moins devant la dérivée a été régulièrement absent et ce signe réapparaît au cours du calcul pour compenser la fin de la question. Beaucoup d'intégrales divergentes apparaissent, avec notamment des "$\ln(0)$". La continuité de la fonction sous le signe intégrale est peu évoquée et beaucoup de copies faibles justifient l'existence en mentionnant que $t \mapsto e^{-t}/t$ tend vers 0 en $+\infty$. La classe C^1 et la conclusion correcte est assez rare.

4. (a) La question a été peu abordée et la majoration très rarement. Énormément de tours de passe passe pour l'inégalité de droite.

(b) On prouve en général la convergence simple, d'autres fois on rappelle de la definition de la convergence, mais on donne une majoration dépendant de x..., et l'idée de majorer par $1/n$ finalement très rare.

(c) Question peu abordée.

5. (a) De façon analogue à la question 3)b), l'intégrale a souvent faussement été séparée en deux par linéarité et le lien avec S a été peu remarqué.

6. (a) La limite a été généralement démontrée mais l'inégalité très peu. Majoration directe par e^{-x}/x en utilisant la décroissance de e^{-t}/t

   (b) Question peu abordée. La plupart cherche à calculer $R(x)$. Peu ont eu l'idée d'intégrer par parties.

Partie II

1. (a) Question très abordée et plutôt réussie même si, à nouveau, un nombre non négligeable de copies justifie l'existence en mentionnant juste la continuité de la fonction intégrée ou le fait qu'elle tende vers 0 en $+\infty$.

   (b) Question plutôt réussie mais beaucoup de candidats oublient de montrer que $I_n = n!$.

2. (a) Le fait que T soit un endomorphisme est plutôt correctement écrit mais la matrice pas toujours correcte trouvée (présence notamment de variables dans la matrice voire de fonctions), ou parfois transposée. L'argument pour la non- diagonalisabilité est en général vu. Certains candidats indiquent que M est diagonalisable car elle possède une valeur propre triple ou parce qu'elle est triangulaire supérieure.

3. (a) Arriver à justifier que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ est plutot rare.

   (b) La formule de Taylor est rarement écrite correctement (beaucoup de formules de Taylor-Young notamment).

4. (a) La méthode est connue mais la détermination de la solution particulière a souvent été mal faite (avec du bluff sur le signe moins). Pour l'équation complète, on intègre souvent de x à l"infini sans justifier.

   Le reste de cette partie a été peu abordé.

Partie III

1. (a) Question très abordée mais où les calculs n'ont abouti que dans la moitié des copies. Beaucoup de relations dépendent de x à la fin des calculs. N'aboutit pas souvent, mais souvent tenté.

   (b) Cette question est peu abordée.

2. (a) Cette question est généralement bien écrite même si l'équivalence n'est pas toujours clairement mentionnée.

   (b) Souvent tenté, parfois réussi.

L'enchainement b à e. rarement mené au bout.. Par exemple $exp(-2x - \ln(x)) = (exp(-2x))/x$ est rare.
La fin du problème est peu abordée.

4. Conseils aux futurs candidats. Conclusion.

La variété des questions a permis un bon étalement des notes. Dans une telle épreuve comportant beaucoup de questions il y a souvent moyen de donner des réponses brèves et il convient de réfléchir aux méthodes à utiliser avant de partir dans des calculs compliqués, ce qui fait partie des compétences évaluées.

Nous ne pouvons que conseiller aux candidats de s'efforcer de bien faire, en rédigeant avec précision ce qui est abordé. Une bonne connaissance du cours est indispensable ainsi que la pratique d'exercices d'entraînement pour acquérir un bon savoir-faire. Une lecture attentive et minutieuse du sujet permet d'ýiter de nombreuses erreurs et incohérences. Les correcteurs attendent des réponses argumentées, précises. Les réferences aux résultats du cours doivent être bien rédigées et sans abréviations. Les correcteurs apprécient les copies propres et bien écrites. On aimerait que les candidats fassent preuve de davantage de rigueur dans les preuves demandées.

Nous constatons des différences sensibles entre les candidats, que les calculs posent problème ainsi et que la précision des explications n'est pas un impératif de tous. Quelques bonnes copies, bien présentées et de bon niveau, mais trop rares.

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice 1

On considère la fonction ζ de la variable réelle x définie par la relation $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque cette notation a un sens.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]1;+\infty[, \quad f_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

(1). Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ.

(2). Soit $a \in]1;+\infty[$. Montrer que la fonction ζ est continue l'intervalle $[a;+\infty[$.
Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction ζ ?

(3). Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a). Montrer que : $\qquad \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1;+\infty[, \qquad f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-\ln(n))^k}{n^x}$

(b). Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1;+\infty[$ sous forme d'une série.

(4). Préciser le sens de variation de ζ.

(5). On se propose dans cette question de justifier l'existence et de déterminer la valeur de la limite de la fonction ζ en $+\infty$.

(a). Montrer que ζ possède une limite finie en $+\infty$.

(b). Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\qquad \forall x \geq 2, \quad 1 \leq \zeta(x) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

(c). En déduire la valeur de la limite de ζ en $+\infty$

(6). On considère à présent $h \in]0,+\infty[$.
À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $\zeta(1+h)$ puis un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1.

(7). Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction ζ.

(8). On pose : $\qquad \forall x \in]0;+\infty[, \quad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$

(a). Justifier que F est bien définie.

(b). Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c). Montrer que : $\qquad \forall x \in]1;+\infty[, \quad \zeta(x) + \mathrm{F}(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$.

(d). Déterminer ensuite la limite de F en $+\infty$.

EXERCICE 2

On rappelle que $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ où $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ désigne le $\mathbb{R}$−espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes. On note $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ et l'on identifiera $\mathbb{R}$ et $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$.

(1). Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0\, {}^tV_0$.

(a). Calculer A_0. Quel est le rang de A_0 ?

(b). Justifier que 0 est valeur propre de A_0 puis déterminer une base du sous-espace propre associé.

(c). **(i).** Calculer A_0U_0.

(ii). Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

(iii). Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

(2). Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

(a). On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de la matrice A.

Démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = CL$.

(b). Vérifier que $LC = \mathrm{tr}(A)$ puis montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$ où $\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de A.

(c). Soit λ une valeur propre de la matrice A et X un vecteur propre associé.

Montrer que $\left(\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda\right)X = 0$ et en déduire que le spectre de A est inclus dans $\{0, \mathrm{tr}(A)\}$.

(d). Le réel 0 est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?

(e). Vérifier que $\mathrm{tr}(A)$ est valeur propre de A.

(f). Montrer que : A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\mathrm{tr}(A) \neq 0$

(3). Soit E un $\mathbb{R}$−espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $f \circ f \neq \tilde{0}$ où $\tilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul.

On désigne par u un vecteur de E tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.

(a). Montrer que $f(u) \neq 0$.

(b). En déduire que l'endomorphisme f possède une valeur propre réelle non nulle.

(c). Montrer alors que f est un endomorphisme diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, λ désignera un réel strictement positif, et X une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ, c'est à dire telle que : $\forall j \in \mathbb{N}, \quad P\left(X = j\right) = \dfrac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$

(1). (a). Montrer que la variable aléatoire réelle discrète $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.

(b). En déduire la valeur de $\mathbb{E}\left(X^2\right)$.

(2). Montrer que : $\quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad P(X \geq i) \leq \dfrac{\lambda^2 + \lambda}{i^2}$.

Que peut-on en déduire pour la série de terme général $P(X \geq i)$ où $i \in \mathbb{N}^*$?

(3). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite $\left(u_{i,k}\right)_{i \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad u_{i,k} = \frac{\lambda^i}{(k+1)(k+2)\ldots(k+i)}$$

(a). Montrer que la série $\sum\limits_{i \geq 1} u_{i,k}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose alors : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad R_{n,k} = \sum\limits_{i=n}^{+\infty} u_{i,k}$.

(b). Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante K que l'on précisera telle que pour tout entier $k \geq K$, on a : $\quad R_{n,k} \leq \sum\limits_{i=n}^{+\infty} \dfrac{\lambda^i}{k^i}$

(4). (a). Montrer que pour tout entier $k > \lambda$, $\quad P(X \geq k) \leq \dfrac{k}{k-\lambda} P(X = k)$.

Puis montrer que pour tout entier $k \geq 2\lambda$, $\quad P(X > k) \leq P(X = k)$.

(b). Dans cette question et uniquement cette question, on suppose que $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$.

Montrer à l'aide des questions précédentes que $\sum\limits_{i=2}^{+\infty} P(X \geq i) \leq 1$.

(c). Dans le cas général, que vaut $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} P(X \geq i)$? Le justifier.

(5). Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Dans cette question, on considère Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(n; \dfrac{\lambda}{n}\right)$.

(a). Montrer que : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad 1 - t \leq e^{-t}$.

(b). Montrer que : $\quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad \dbinom{n}{k} \leq \dfrac{n^k}{k!} e^{-\alpha(n,k)} \quad$ où $\quad \alpha(n,k) = \dfrac{(k-1)k}{2n}$.

(c). Montrer que : $\quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad P(Y = k) \leq \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} e^{\beta(n,k,\lambda)} \quad$ où $\quad \beta(n,k,\lambda) = \dfrac{k(2\lambda + 1 - k)}{2n}$.

(d). Quelle majoration de $P(Y = k)$ peut-on obtenir pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda + 1$?

(e). En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda + 1$: $\quad \sum\limits_{j=k+1}^{n} P\left(Y = j\right) \leq \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

EXERCICE 4

On dit qu'un entier naturel n est premier si, et seulement si, il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

0 et 1 ne sont donc pas des nombres premiers. Par contre, 3 est un nombre premier puisque l'ensemble de ses diviseurs est exactement $\{1,3\}$.

Toutes les fonctions demandées ci-après seront à réaliser dans le langage `Python`

On pourra au fil des questions utiliser les fonctions construites dans les questions précédentes.

(1). Écrire une fonction `divise(p,q)` d'argument deux entiers naturels non nuls p et q , renvoyant True si p divise q et False sinon.

(2). Écrire une fonction `estpremier(p)` d'argument un entier naturel p, renvoyant 1 si p est premier et 0 sinon.

(3). Écrire une fonction `phi(p)` d'argument un entier naturel p, renvoyant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p.

(4). Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\varphi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

Pour la suite de cet exercice, on admettra le résultat suivant, appelé théorème des nombres premiers : $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\ln(n)}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\Theta(n) = \left|\dfrac{\varphi(n)\ln(n)}{n} - 1\right|$.

(a). Rappeler la définition de deux suites équivalentes (les suites envisagées seront supposées n'avoir aucun terme nul).

(b). Prouver que le théorème des nombres premiers implique qu'il existe une infinité de nombres premiers.

(c). Écrire une fonction `test(epsilon)` d'argument un réel `epsilon` strictement positif, renvoyant le premier entier naturel $N \geq 50$ tel que $\Theta(N) \leq \varepsilon$.

(d). Donner une suite d'instructions permettant de tracer le graphe de la fonction Θ sur $[\![50;5000]\!]$.

RAPPORT DE L'EPREUVE DE MATHS 1 E3A PC

1) PRESENTATION DU SUJET

Le sujet comportait 4 exercices indépendants, chacun sur un thème différent (analyse, algèbre, probabilités, algorithmique et programmation).

Chaque exercice se composait de plusieurs questions de difficulté graduée et plus ou moins indépendantes. Les programmes des deux années étaient concernés.

Les thèmes abordés sont pour la plupart classiques, comme la fonction ζ , les matrices de rang 1, les queues de lois de probabilités ou les nombres premiers.

Les questions font appel aux connaissances de base du calcul de seconde année, tant en analyse, qu'en calcul matriciel ou dans le dénombrement, ainsi qu'à la maitrise de quelques algorithmes simples utilisant des tests, des compteurs ou des boucles conditionnelles.

De nombreuses questions portent sur le cours ou sur des conséquences immédiates du cours, quelques unes font appel à une maitrise plus approfondie comme la continuité ou la classe $\mathcal{C}^\infty$ d'une somme de série de fonctions.

2) COMMENTAIRE GENERAL DE L'EPREUVE

L'épreuve a été traitée par 2662 candidats. Les notes obtenues vont de 0 à 20, avec une moyenne de 9,72/20 et un écart-type de 4,49.

Le sujet regroupait un nombre important de questions sur des thèmes très variés et de difficulté très hétérogène. Les candidats ont pu aisément occuper leur 4 heures en se consacrant à leurs thèmes de prédilection.

Au demeurant, la plupart des candidats aborde tous les exercices, en général de façon substantielle.

L'équipe de correction a constaté dans l'ensemble que les copies sont bien présentées, rédigées et que le travail effectué a été soigné. Ce soin a été récompensé, et dans les rares cas de copies de mauvaise facture, les candidats ont été sanctionnés.

3) ANALYSE DES RESULTATS PAR EXERCICE

• *Exercice*1

Il s'agissait de l'étude approfondie de la fonction ζ.
L'ensemble de définition ne pose que rarement problème.

La continuité nécessitait de connaitre et appliquer correctement le théorème relatif aux séries de fonctions. Sur ce point on note d'importants écarts entre les copies. Dans l'ensemble cette question a été bien traitée, mais par une minorité de candidats.

Même remarque pour la classe $\mathcal{C}^\infty$, où les dérivées successives ne posent pas problème, mais le théorème est souvent mal compris ou mal rédigé.

Si la limite de la question 5 a été mieux réussie, on regrette l'absence trop fréquente de courbes à la question 7 ; même approximatives, les courbes rapportent des points non négligeables.

La question 8 a été moins traitée que les autres, mais souvent avec succès, à l'exception du ii) ou là encore la continuité pose problème.

• *Exercice*2

Il s'agissait là d'étudier, d'abord sur un exemple, puis de façon générale la diagonalisabilité des matrices de rang 1.

La question 1 a rapporté beaucoup de points à la plupart des candidats, récompensant ceux qui ont travaillé les techniques classiques sur ce thème.

La question 2a fut plus délicate en particulier à cause de la démonstration d'existence. Cependant, la suite a été plutôt réussie.

La question 3 a été moins traitée et sa première sous-question a entrainé des confusions entre f non nulle et f(x) non nul pour un x donné.

• *Exercice*3

L'exercice 3 était dans le thème des probabilités mais en pratique axé sur le calcul et le dénombrement.

La première question a posé problème par l'utilisation de l'inégalité de Markov, mais aussi par une rédaction souvent hasardeuse sur les critères de convergences de séries à termes positifs.

Les questions suivantes ont moins inspiré les candidats peut-être soucieux d'aborder vite le dernier exercice, ou rebutés par les techniques calculatoires.

Nous avons remarqué cependant que nombre de bons candidats ont largement traité cet exercice avec souvent un réel succès.

• *Exercice*4

C'est l'exercice qui a le mieux réussi aux candidats.

Les questions ont en général été bien traitées, tant sur le principe des algorithmes que sur la correction de la syntaxe du code python.

Le point qui paradoxalement pose souvent problème reste la question 4a qui est pourtant un simple rappel de cours sur une notion très classique en analyse.

4) CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS

Comme souvent dans les rapports de jury de l'écrit, il convient de rappeler aux futurs candidats que les épreuves sont calibrées de manière à ce qu'un candidat de niveau correct et ayant travaillé sérieusement toute l'année ait une note au dessus de 10/20. A ce titre nous rappelons :

• Qu'il est indispensable de connaitre parfaitement les théorèmes et définitions des programmes de première et deuxième année.

• Qu'un théorème s'utilise en rappelant son énoncé et ses hypothèses et en l'appelant par son nom s'il en a un.

• Que les questions nécessitant de longs calculs rapportent des points en conséquence et qu'il ne faut pas les négliger.

• Que dans tous les exercices il y a des points à prendre et qu'on peut tenter de traiter des questions dans toutes les parties.

• Qu'aucune partie du programme ne doit être négligée.

• Que la qualité de la rédaction et de l'argumentation mathématique est un élément fondamental pris en compte lors de l'évaluation.

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Le but de ce problème est de donner, dans les parties I. et II., quatre expressions différentes du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis d'étudier, dans la partie III., la vitesse de convergence de ces quatre séries.

On rappelle que pour une série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} u_k$ convergente, le reste d'indice n, pour $n \in \mathbb{N}$, est le réel défini par $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Partie I.

1. Rappeler, en précisant le rayon de convergence, le développement en série entière de la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $x \mapsto \ln(1+x)$.
2. Montrer alors que $\displaystyle\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.
3. (a) Donner le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$.

   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.
4. (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| \leq \frac{1}{n+1}$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Partie II.

On considère dans la suite de ce problème, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1 \times 3 \cdots \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{n2^{n+1}n!}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle a_n = \frac{(2n)!}{n2^{2n+1}(n!)^2}$.

   (b) Rappeler la formule de Stirling.

   (c) Montrer que la série de terme général a_n est convergente.

2. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,dx$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{I_{n+1}}{2n+1}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!}\dfrac{\pi}{2}$, puis donner une relation liant I_n et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $f_n(x) = \dfrac{\sin^{2n}(x)}{n}$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ vers une fonction f que l'on déterminera.

   (b) Montrer que f est intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,dx$.

4. On note $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,dx$.

   (a) En utilisant un changement de variable, montrer que J est convergente et que $I = J$.

   (b) En calculant $I + J$ trouver la valeur de I.

5. Donner, en le justifiant, la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Partie III.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.
R_n, S_n, T_n et V_n sont donc les restes d'indice n des séries vues en première et deuxième partie.
Le but de cette partie est de déterminer des équivalents des quatre suites (R_n), (S_n), (T_n) et (V_n).
On rappelle que la notation $u_n \sim v_n$ signifie que la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) et que la notation $u_n = \circ(v_n)$ signifie que la suite (u_n) est négligeable devant la suite (v_n).

1. On note dans cette question $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $U_n = \displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$.

   (a) Calculer U_n. Ecrire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2^k}$ en fonction de deux termes de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \dfrac{U_n}{n+1} - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = \circ(R_n)$.

   (d) Conclure que $R_n \sim \dfrac{1}{n2^n}$.

2. (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.

   (c) Montrer que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\, dt.$$

   (d) Conclure que $S_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$.

3. (a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall k \geq N, \quad (1-\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}} \leq a_k \leq (1+\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}}.$$

   (b) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$.

   (c) Déduire des questions précédentes que

$$\forall n \geq N, \quad (1-\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \leq T_n \leq (1+\epsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

   (d) Conclure que $T_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

4. Montrer que $V_n \sim \dfrac{1}{n^2 2^n}$.

5. Parmi les quatre séries étudiées dans ce problème, laquelle converge le plus rapidement? Laquelle converge le moins rapidement? Justifier vos réponses.

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques PC2 (problème) 2016

Présentation du sujet
L'épreuve est un problème divisé en trois parties ; le but des deux premières parties est de donner quatre expressions du réel ln(2) sous la forme d'une somme de série puis, dans la troisième partie, d'étudier la vitesse de convergence de ces quatre séries en déterminant un équivalent de leur reste. Ce problème permettait d'utiliser une bonne partie du cours d'analyse ainsi que plusieurs techniques et exemples classiques : série harmonique alternée, intégrales de Wallis, intégrales de Dirichlet, transformation d'Abel, comparaison série-intégrale.

Analyse par parties

Partie 1
Une question de cours, une bonne moitié des candidats, seulement, connaissait le développement en série entière demandé à la question 1., le rayon de convergence étant alors souvent correct. Pour la question 2. il suffisait de penser à utiliser $x = -1/2$ ce qui n'a pas éte souvent perçu. Ce résultat ayant d'ailleurs généré des propositions inexactes à la question précédente. Pour le calcul du rayon de convergence de la question 3., les candidats ont pensé, en général, à utiliser la règle de d'Alembert ; pour le calcul de la somme, certains candidats pensent à utiliser soit un télescopage soit à primitiver le développement en série entière de $\ln(1-x)$, mais avec beaucoup de maladresses dans les calculs, un résultat final correct étant assez rare. A la question 4., on reconnait souvent une série alternée, mais certains affirment une convergence absolue. La majoration uniforme du module du reste en revanche n'est pas toujours justifiée et on ne sait pas en général l'utiliser pour calculer la limite en 1.

Partie 2
C'est la partie la moins bien traitée. La formule de Stirling est correctement énoncée par un candidat sur deux ; la plupart des candidats cherchent à montrer la convergence de la série de terme général a_n en utilisant la règle de d'Alembert (qui ne marche pas ici) sans penser à utiliser un équivalent. Pour la question 2.a. la plupart des candidats pensent à faire une intégration par parties mais un grand nombre de candidats se trompent sur les primitives et dérivées des fonctions en jeu. A la question 3.a. les candidats ont confondu la convergence simple de la série de fonctions avec la convergence simple de la suite de fonctions. La technique de changement de variable est connue et souvent maitrisée mais le choix du changement de variable n'était pas toujours judicieux, lorsque celui-ci n'est pas donné explicitement il faut commencer par penser a un changement de variable affine.

Partie 3
Les deux calculs de somme de termes d'une suite géométrique de cette partie (1.a. et 2.a.) ont posé beaucoup de problèmes aux candidats. La transformation d'Abel (question 1.) était ici guidée, certains candidats arrivent au bout du calcul. La notion de négligeabilité (question (1.c.) n'est pas

maîtrisée par les candidats. L'intégration par partie de la question 2.c. a été en général bien traitée mais l'équivalent de la question 2.d a posé plus de problème. A la question 3.b. un nombre satisfaisant de candidats reconnaissent la technique de comparaison série-intégrale. La dernière question du sujet est abordée dans de nombreuses copies, même faibles, les réponses données plus ou moins bien justifiées étant la plupart du temps correctes.

Commentaire général de l'épreuve

L'épreuve a été traitée par 2058 candidats. Les notes sont étalées entre 0 et 20 avec une moyenne de 9.41 et un écart-type de 4.75. Le sujets n'étant pas trop long et les parties étant indépendantes, toutes les parties ont été abordées en revanche peu de questions ont été bien traitées par une majorité des candidats. Ceux ayant des bases solides d'analyse s'en sont bien sortis ce qui a donné de bonnes, voire très bonnes copies. Le bilan est cependant, en moyenne, plus mitigé et parfois décevant avec des faiblesses surprenantes sur des notions basiques d'analyse (par exemple sur les calculs de somme de termes d'une suite géométrique), on a pu ainsi observé un nombre important de notes faibles.
Les correcteurs ont pu parfois constater que, pour traiter certaines questions, les candidats connaissent la méthode ou ont la bonne idée mais sont complètement bloqués dans la mise en oeuvre de celle-ci par en général des difficultés importantes dans les calculs. Les copies étaient dans l'ensemble bien présentées.

Conseils aux futurs candidats

- ne pas négliger certains chapitres du programme ; un candidat ayant, par exemple, fait l'impasse sur les séries, obtient nécessairement une mauvaise note sur une telle épreuve.
- s'entraîner à faire des calculs afin de de pas être bloqué dans la mise oeuvre d'une méthode ou technique.
- les correcteurs encouragent fortement la bonne présentation ainsi que la qualité de la rédaction des copies, un nombre de points non négligeable leur est consacré. Sont sanctionnées, par exemple, les copies mal présentées (soulignez vos résultats), les copies comportant trop de fautes d'orthographes ou bien celles dont la rédaction est trop elliptique.

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants. Dans chacun des exercices, les différentes parties ne sont pas indépendantes, mais tout résultat peut-être admis pour être utilisé par la suite.

Dans tous les exercices, étant donnés deux entiers naturels a, b tels que $a < b$, $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels n tels que $a \leq n \leq b$. On note N^* l'ensemble des entiers naturels non nuls.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien. Le produit scalaire sur E est noté $<\,,\,>$ et la norme associée $\|\ \|$.

A. Préliminaires : Soient u_1, u_2 deux vecteurs de E.

1. Démontrer l'inégalité :

$$|<u_1, u_2>| \leq \|u_1\|\,\|u_2\|$$

On pourra considérer la fonction f définie par $f(t) = \|u_1 + tu_2\|^2$ pour t dans $\mathbb{R}$ et démontrer qu'il s'agit d'une fonction polynomiale.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les vecteurs u_1, u_2 pour que $|<u_1, u_2>| = \|u_1\|\,\|u_2\|$. Justifier votre réponse.

Soit n un entier naturel non nul. Pour toute famille $(u_1, ..., u_n)$ de vecteurs de E, on note $G(u_1, ..., u_n)$ la matrice (n, n) dont le (i, j)-ème coefficient est $<u_i, u_j>$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.

Soit M une matrice (n, n) à coefficients dans $\mathbb{R}$, dont le (i, j)-ème coefficient est noté $m_{i,j}$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.
Si p est un entier naturel non nul, $M^{\otimes p}$ désigne la matrice (n, n) dont le (i, j)-ème coefficient est $m_{i,j}^p$, pour tout (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$.

On dit que la matrice M vérifie la propriété `G` s'il existe des vecteurs $u_1, ..., u_n$ dans E tels que :

$$M = G(u_1, ..., u_n).$$

B. Dans cette partie, on suppose $n = 2$. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice $(2, 2)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

3. On suppose que la matrice B vérifie la propriété `G`. Soit (u_1, u_2) dans E^2 tels que $B = G(u_1, u_2)$. Justifier que $a \geq 0$, $b = c$, $d \geq 0$ et $\det B \geq 0$.
4. Réciproquement, on suppose que $a \geq 0$, $b = c$, $d \geq 0$ et $\det B \geq 0$. Justifier que B vérifie la propriété `G`.
Indications : En considérant (e_1, e_2) une base orthonormale de E, on pourra construire une famille de vecteurs (u_1, u_2) telles que $B = G(u_1, u_2)$ en choisissant u_1 sous la forme xe_1 et u_2 sous la forme $ye_1 + ze_2$ pour des nombres réels x, y, z qu'on précisera. On pourra commencer par étudier le cas $a > 0$.
5. Justifier que la matrice B vérifie la propriété `G` si et seulement si, pour tout entier p dans N^*, $B^{\otimes p}$ vérifie la propriété `G`.

C. Dans cette partie, on suppose $n = 3$. Soient a, b deux nombres réels. On pose :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}.$$

6. On suppose que la matrice C vérifie la propriété `G`. Soient u_1, u_2, u_3 des vecteurs de E tels que $C = G(u_1, u_2, u_3)$.
   (a) Démontrer que $a \geq 1$ et $a \geq b^2$.
   (b) Justifier que la famille (u_1, u_3) est othonormale.

(c) Déterminer le vecteur v_2 projection orthogonale du vecteur u_2 sur le plan engendré par les vecteurs u_1 et u_3.

(d) En déduire que $a \geq b^2 + 1$.

(e) Démontrer que les vecteurs u_1, u_2, u_3 sont linéairement indépendants si et seulement si $a > b^2 + 1$.

7. On suppose $a \geq b^2 + 1$. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E.

   (a) Déterminer l'ensemble des vecteurs $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tels que $< u, e_1 >= 1$ et $< u, e_3 >= b$.

   (b) Justifier que la matrice C vérifie la propriété `G`.

   (c) Est-il vrai que, pour tout p dans N^*, la matrice $C^{\otimes p}$ vérifie la propriété `G` ? On argumentera précisément la réponse.

D. Soit $\mathcal{C}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $]0, +\infty[$. Soit $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ des fonctions f telles que pour tout polynôme P, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)^2 P(t)dt$ est absolument convergente. On ne demande pas de vérifier que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

Soit p dans N^*.

8. Démontrer que pour tous f et g dans $\mathcal{E}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1}dt$ est absolument convergente.

9. On peut donc définir l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathcal{E} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \rightarrow & < f, g >_p = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1}dt \end{array}$$

   Démontrer que c'est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

10. Démontrer que la fonction h définie par $h(t) = e^{-t}$ pour $t \in]0, +\infty[$, appartient à $\mathcal{E}$.

Dans la suite, on note :

$$\gamma_p = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt.$$

11. Soit α un nombre réel strictement positif. On admet que la fonction h_α définie par $h_\alpha(t) = e^{-\alpha t}$ pour $t \in]0, +\infty[$, appartient à $\mathcal{E}$. Exprimer $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^{p-1} dt$ en fonction de α, p et γ_p.

12. Soit n un entier naturel ≥ 2. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des nombres réels strictement positifs. On désigne par D la matrice (n, n) à coefficients dans $\mathbb{R}$ dont le (i, j)-ème coefficient $d_{i,j}$, pour (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$, est défini par :

$$d_{i,j} = \frac{1}{\alpha_i + \alpha_j}.$$

   Démontrer que pour tout entier naturel non nul p, il existe un espace euclidien E et une famille $(u_1, ..., u_n)$ dans E^n tels que la matrice $D^{\otimes p} = G(u_1, ..., u_n)$. On explicitera E, son produit scalaire ainsi que la famille $(u_1, ..., u_n)$.

Exercice 2

On note $\mathbb{R}^*$ l'ensemble $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

A. Soit F la fonction définie en un nombre réel x par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x > 0 \\ x^2, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa dérivée F'. La fonction F' est-elle continue ? est-elle dérivable ?
3. Etablir le tableau de variations de F et dessiner précisément le graphe de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

B. Soit E_0 l'ensemble des fonctions H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à l'intervalle $]-\infty, 0[$ et la restriction à l'intervalle $]0, +\infty[$ sont toutes deux des fonctions polynomiales de degré ≤ 2.

4. Démontrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
5. Soient P et Q deux fonctions polynomiales de degré ≤ 2. On pose $P : x \to ax^2 + bx + c$ et $Q : x \to dx^2 + ex + f$. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = \begin{cases} P(x), & \text{si } x < 0 \\ Q(x), & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

   Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les nombres réels a, b, c, d, e, f pour que H soit une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. En déduire une base de E_0. Quelle est la dimension de E_0 ?

6. Soit Ψ_0 l'application de E_0 dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\Psi_0(H) = (H(0), H'(0), H(1))$.
   (a) Démontrer que Ψ_0 est une application linéaire.
   (b) Déterminer le noyau de Ψ_0.
   (c) En déduire que Ψ_0 est surjective.

C. Soit α un nombre réel. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $P : x \to ax^2 + bx + c$ une fonction polynomiale de degré ≤ 2. Soient u, v, w des nombres réels tels que $f(\alpha) = u$, $f'(\alpha) = v$. Soit H la fonction définie pour x dans $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \leq \alpha \\ P(x), & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

7. Justifier que H est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $H(\alpha+1) = w$ si et seulement si (a, b, c) est solution d'un système linéaire qu'on explicitera. *Indication : on pourra exprimer a en fonction de $P(\alpha+1)$, $P(\alpha), P'(\alpha)$.* Ce système linéaire a-t'il une unique solution ?
8. Ecrire une fonction `prolonge` en python qui prend en entrée des nombres (u, v, w, β) et donne en sortie un triplet (a, b, c) tel que la fonction polynomiale définie par $h : x \to ax^2 + bx + c$ vérifie : $h(\beta - 1) = u, h'(\beta - 1) = v$ et $h(\beta) = w$.

D. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $I_0 =]-\infty, 0], I_1 =]0, 1]$, $I_2 =]1, 2]$, ... , $I_j =]j-1, j]$, ... ,$I_{n-1} =]n-2, n-1]$, $I_n =]n-1, +\infty[$.
Soit E l'ensemble des fonctions H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et telles que sur chacun des intervalles $I_0, I_1, ..., I_n$ la restriction de H est une fonction polynomiale de degré ≤ 2. On admet que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

9. Pour j un entier compris entre 0 et n, soit $P_j : x \to a_j x^2 + b_j x + c_j$ une fonction polynomiale de degré ≤ 2. Soit H la fonction définie par : $H(x) = P_j(x)$, si $x \in I_j$, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$.
   (a) Démontrer que la fonction H appartient à E si et seulement si le vecteur $(a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, ..., a_{n_1}, b_{n_1}, c_{n_1}, a_n, b_n, c_n)$ est solution d'un système linéaire à $2n$ équations qu'on explicitera.
   (b) Résoudre ce système si on suppose de plus que H s'annule en tout point i dans $[\![0, n-1]\!]$. On commencera par exprimer b_i et c_i en fonction de a_i et i pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$.
   (c) On considère l'application :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & E & \to & \mathbb{R}^n \\ & & H & \to & (H(0), H(1), ..., H(n-1)) \end{array}$$

      i. Justifier que φ est une application linéaire.
      ii. Quel est le noyau de φ ? En préciser la dimension.
      iii. Démontrer que φ est surjective. On pourra faire une démonstration par récurrence sur n.
      iv. Quelle est la dimension de E ? On citera précisément le théorème utilisé.

10. Soient $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{49}$ des nombres réels. Ecrire un programme `interpo` en python qui prend en entrée $\beta_0, ..., \beta_{49}$ et donne en sortie une liste de triplets $(a_0, b_0, c_0), (a_1, b_1, c_1), ..., (a_{50}, b_{50}, c_{50})$ tels que la fonction H définie par : $H(x) = a_j x^2 + b_j x + c_j$, si $x \in I_j$, pour $j \in [\![0, 50]\!]$, est dans E et vérifie de plus $H(i) = \beta_i$ pour tout $i \in [\![0, 49]\!]$.

Exercice 3

A. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 3$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction $(x \to \dfrac{1}{1-x})$ au voisinage de 0. Quel est son rayon de convergence ?
2. Calculer les valeurs propres de la matrice M. Justifier qu'elles sont dans l'intervalle $]-1, 1[$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. On note α et β les valeurs propres de la matrice M.
   (a) Justifier qu'il existe des nombres réels A et B tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A\alpha^n + B\beta^n.$$

   (b) Sans chercher à calculer A et B, justifier les égalités :

i. $A + B = 4$,

ii. $A\alpha + B\beta = 3$,

iii. $A\beta + B\alpha = -1$.

(c) Démontrer l'égalité :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \frac{A(1-\beta) + B(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}.$$

(d) En déduire la valeur de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

4. Proposer une fonction en python, `suite`(N), qui prend en entrée l'entier naturel N et renvoie la liste des $N+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sous forme de nombres rationnels. Préciser la complexité de votre algorithme en fonction des opérations que vous utilisez (additions, multiplications...).

B. On dispose d'une pièce qui, lorsqu'elle est lancée, tombe sur « pile » avec la probabilité p et tombe sur « face » avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que p est dans $]0, 1[$.

Alice et Benoît jouent à un jeu de « pile ou face » avec cette pièce de la façon suivante : La pièce est lancée plusieurs fois de suite jusqu'à ce que trois lancers successifs fournissent deux fois « pile » suivies d'une fois « face » ou une fois « face » suivie de deux fois « pile ». Dans le premier cas, deux fois « pile » suivies d'une fois « face » , Alice gagne et dans le cas une fois « face » suivie de deux fois « pile » , Benoît gagne.

On désigne par *motif* le résultat de trois lancers successifs.
Par exemple, si on a effectué 7 lancers dont le résultat est « pile, face, pile, face, face, pile, pile » les motifs de longueur 3 sont « pile, face, pile », « face, pile, face », « pile, face, face », « face, face, pile » et « face, pile, pile » ; à ce stade, Benoît a gagné et la partie est finie.

Soit n un entier naturel non nul. On note X_n la variable aléatoire qui donne la valeur du n-ième lancer : la variable X_n prend la valeur 1 lorsque la pièce tombe sur « pile » et la valeur 0 lorsque la pièce tombe sur« face ».

La probabilité d'un événement A lié à ce jeu sera noté $P(A)$. Ainsi, pour n dans N^*, $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = 0) = q$.

Les lancers sont supposés indépendants, donc les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

Soit n dans N^*. On note E_n l'évènement « Ni Alice, ni Benoît n'ont gagné après n lancers » , A_n l'évènement « le n-ième lancer fait gagner Alice » et B_n l'évènement « le n-ième lancer fait gagner Benoît ».

5. Déterminer $P(E_n), P(A_n), P(B_n)$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

6. Soient n et k deux entiers naturels non nuls. Soit $(x_0, ..., x_k)$ dans $\{0, 1\}^{k+1}$. Justifier que les évènements $E_n \cap (X_n = x_0)$ et $(X_{n+1} = x_1) \cap (X_{n+2} = x_2) \cap \cdots \cap (X_{n+k} = x_k)$ sont indépendants.
Que peut-on en déduire pour la probabilité de l'événement
$E_n \cap (X_n = x_0) \cap (X_{n+1} = x_1) \cap (X_{n+2} = x_2) \cap \cdots \cap (X_{n+k} = x_k)$?

7. Soit n dans N^*. On note v_n la probabilité de l'évènement $E_n \cap (X_n = 0)$ et w_n la probabilité de l'évènement $E_n \cap (X_n = 1)$.

(a) Exprimer v_1, v_2, w_1, w_2 en fonction de p et q.

(b) Soit n un entier naturel ≥ 3. En décomposant l'événement $E_n \cap (X_n = 0)$ selon la valeur prise par X_{n-1}, démontrer que $v_n = qv_{n-1} + pqv_{n-2}$.

(c) Soit n un entier naturel ≥ 3. On considère une suite de n lancers consécutifs qui n'a fait gagner ni Alice, ni Benoît et qui se conclut par un « pile » (X_n prend la valeur 1.) On suppose que lors de l'un au moins de ces lancers, la pièce est tombée sur « face ». On note k le plus grand indice tel que, pour cette suite, X_k a pris la valeur 0 (c'est-à-dire le dernier lancer pour lequel la pièce est tombée sur « face »). Justifier que $k = n - 1$.

(d) Soit n un entier naturel ≥ 3. Démontrer que $w_n = p^n + pv_{n-1}$.

8. Soit T la variable aléatoire « durée du jeu » , c'est-à-dire que T prend la valeur n lorsque « Alice ou Benoît gagne à la n-ième étape » , pour $n \in \mathbb{N}^*$. Si la partie ne se termine pas, T prend la valeur $+\infty$.

   (a) Soit n un entier naturel ≥ 2.

      i. Que peut-on dire des événements $(T > n)$ et E_n ?

      ii. En déduire l'expression de $P(T > n)$ en fonction de v_n, v_{n-1} et p.

      iii. Justifier que $P(T = +\infty) = 0$.
      Indication : On pourra étudier la suite $(v_n + pv_{n-1})_{n\geq 2}$ et démontrer qu'elle est décroissante.

      iv. Quelle propriété du jeu obtient-on ainsi ?

   (b) Si la série $\sum_{n=2}^{+\infty} v_n$ est convergente, démontrer que la variable T est d'espérance finie. En notant $E(T)$ cette espérance, justifier l'égalité :

$$E(T) = 2 + p + \frac{p^3}{1-p} + (1+p)(\sum_{n=2}^{+\infty} v_n).$$

   (c) On suppose dans cette question seulement que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire $p = q = \frac{1}{2}$. Démontrer que la variable T est d'espérance finie et calculer $E(T)$.
   Indication : On pourra calculer v_2 et v_3.

9. Soit n un entier naturel ≥ 3.

   (a) On considère une suite de n lancers consécutifs telle qu'Alice gagne la partie au n-ième lancer. Démontrer que lors des $n - 1$ premiers lancers, la pièce n'est pas tombée sur « face ».

   (b) En déduire la probabilité qu'Alice gagne la partie au n-ième lancer , soit $P(A_n)$, puis la probabilité que Benoît gagne la partie au n-ième lancer , soit $P(B_n)$.

10. Exprimer en fonction de p la probabilité qu'Alice gagne la partie et la probabilité que Benoît gagne la partie. Quelles valeurs obtient-on pour ces deux probabilités lorsque la pièce est équilibrée ?

11. Quelle valeur donner à p pour que le jeu soit équitable ?

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques PC1 (exercices) 2016

Présentation du sujet

Le sujet est composé de trois exercices indépendants sur des thématiques du programme différentes : espaces euclidiens, systèmes linéaires, probabilités . Les programmes des deux années sont abordés.

Commentaire général de l'épreuve.

L'épreuve a été traitée par 2702 candidats. Les notes se sont étalées entre 0 et 20 avec une moyenne de 9,94 et un écart-type de 3,77. Les exercices étaient longs et il était possible d'obtenir une très bonne note avec un investissement significatif dans seulement deux des exercices, mais beaucoup de candidats ont préféré picorer dans chacun des exercices, avec une certaine tendance au grapillage. Les copies sont dans l'ensemble bien présentées et il en est tenu compte dans la notation pour les distinguer de celles écrites sans soin ou rédigées de façon désinvolte. Sont en particulier pénalisés l'accumulation de fautes d'orthographe ou les abus d'abréviation.

Analyse par exercice:

- Exercice 1 :

  Il s'agissait d'un exercice d'algèbre linéaire dans les espaces euclidiens construit autour des matrices de Gram et leurs puissances de Hadamard. On utilisait l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui faisait l'objet du début de l'exercice, puis une partie élémentaire sur le cas particulier des matrices $(2, 2)$, un cas particulier de matrices $(3, 3)$ et enfin un le cas des matrices de Cauchy en dimension quelconque. Dans l'ensemble, l'exercice a été peu réussi. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pourtant rappelée n'est pas connue de nombreux candidats et prend des formes fantaisistes. Dans la partie B, l'équivalence finale n'est trop souvent pas comprise, faute d'une compréhension du sens du quantificateur. Dans la partie C, beaucoup de candidats appliquent aux matrices $(3, 3)$ ce qui vient d'être démontré uniquement pour des matrices $(2, 2)$. La partie D n'est correctement abordée que dans les très bonnes copies. Le changement de variables de la question 11 est très souvent incorrect.

- Exercice 2 :

  Il s'agissait d'un exercice d'algèbre linéaire dont le but est de proposer un algorithme de construction de l'interpolation d'une fonction par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ polynomiale de degré au plus 2 par morceaux (spline quadratique). La construction était basée sur la résolution de systèmes linéaires et on utilisait cette situation pour déterminer la dimension de l'espace de solutions. C'est l'exercice le moins réussi. Seules les questions très faciles sont traitées, et même celles-ci donnent trop souvent lieu à des réponses fausses par désinvolture dans l'argumentation : on démontre que la fonction de la question A est continue, puis on affirme que par les mêmes arguments elle est dérivable puis deux fois dérivable, ce qui est faux, une application linéaire dont on demande le noyau est "forcément" injective (elle ne l'était pas) , les systèmes linéaires dont le nombre d'inconnues et le nombre d'équations coïncident n'ont qu'une solution (ce n'était pas le cas)...

- Exercice 3 :
  C'est l'exercice le plus investi et le plus réussi. On étudie un jeu (le jeu de Penney) qui semble a priori équitable, mais les calculs démontrent le contraire (à moins d'utiliser une pièce non équilibrée).

  L'étude de la suite récurrente dans la partie A est souvent correctement menée, environ un dixième des copies font même l'effort de l'application numérique de la question (d). La question de programmation est abordée dans un nombre non négligeable de copies. L'énoncé demandait explicitement des nombres rationnels de façon à encourager les candidats à utiliser le relation de récurrence plutôt que l'expression développée 3(a) peu efficace et non exacte, en vain. Il n'a pas éte tenu compte de l'efficacité du programme mais de la cohérence du calcul de complexité avec le programme proposé. La notion de complexité et l'utilisation des O est loin d'être maitrisé, même chez les candidats qui proposent un programme correct. Le reste de l'exercice était des probabilités et comportait de nombreuses questions de calcul. Elles ont souvent été traitées. Si les calculs sont menés, il n'en est pas de même pour l'argumentation et les candidats peinent le plus souvent à exprimer précisément pourquoi des événements sont indépendants (question 6) ou pourquoi certains événements en enchaînent d'autres (questions 7(c) ou 9(a)). Peu de candidats ont dépassé la question 8(a).

Conseil aux futurs candidats

- Lisez bien l'énoncé.
- Dans les calculs, justifiez vos égalités une par une. Relisez-vous pour éviter les erreurs de recopie d'une ligne sur l'autre.
- Les questions se résolvent souvent par application des théorèmes de cours. Il faut donc les connaître précisément et s'interroger sur le respect des hypothèses avant d'en utiliser un.
- Dans les questions ouvertes, c'est votre argumentation qui doit guider votre conclusion. Une réponse donnée au hasard a peu de chance d'être correcte.

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans tout le problème, on note tan la fonction tangente.

Etant donnés un entier naturel $n \geqslant 1$ et une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur I. La notation $f^{(0)}$ désigne f.

Tournez la page S.V.P.

Partie IA .

1. Quelle est la période de la fonction tan ?
2. Représenter la fonction tan sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. Démontrer l'existence d'une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
   - $T_0(X) = X$,
   - et pour tout entier naturel n, $\tan^{(n)}$, dérivée n-ième de la fonction tan, vérifie :

   $$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x)).$$

   On explicitera une relation de récurrence vérifiée par les polynômes T_n et T_{n+1}.
4. Expliciter les polynômes T_1, T_2, T_3.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les coefficients du polynôme T_n sont des entiers naturels. Quel est le degré du polynôme T_n ?
6. Justifier qu'il existe une unique suite de nombres entiers naturels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t_j}{(2j+1)!} x^{2j+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} T_{2n+2}(\tan(t))dt.$$

   On citera précisément le théorème utilisé.

Partie IB.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et symétrique par rapport à 0. Soit f une fonction de la variable réelle x de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. Pour tout entier naturel non nul n, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième et R_n la fonction définie pour $x \in I$ par :

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

On suppose que f est impaire et que pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel x dans I tel que $x \geq 0$, $f^{(n)}(x) \geq 0$.

7. Soit $x \in I$. Pour tout entier naturel non nul n, justifier l'égalité :

   $$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x).$$

8. Soit $b \in I$ tel que $b > 0$.
   (a) Démontrer que la suite $(R_n(b))_{n\geq 1}$ est convergente.
   (b) Soient $x \in [0, b]$ et n un entier naturel non nul.

i. Justifier l'égalité :

$$R_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(tx)(1-t)^{n-1}dt.$$

ii. En déduire que :

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(tb)(1-t)^{n-1}dt.$$

iii. Démontrer que :

$$R_n(x) \leqslant (\frac{x}{b})^n R_n(b).$$

(c) En déduire que pour tout x dans $]-b, b[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

On justifiera précisément la convergence de la série.

9. La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant été définie dans la question IA6, démontrer que :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \ \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

10. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$? Justifier votre réponse.

Partie II A.

Soit n un entier naturel ≥ 2. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel formé par l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré $\leq n$. Pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note P' son polynôme dérivé.

Pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\psi_n(P)$ l'application de la variable réelle x définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \psi_n(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt.$$

1. Calculer $\psi_n(X^i)$, pour $i \in \{0, \cdots, n\}$.
2. Vérifier que pour tout P dans $\mathbb{R}_n[X]$, $\psi_n(P)$ est une application polynomiale de degré $\leq n$.
3. Démontrer que ψ_n, l'application qui associe à P dans $\mathbb{R}_n[X]$, $\psi_n(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Ecrire la matrice de ψ_n sur la base $(1, X, ..., X^n)$.
5. Démontrer que ψ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. L'endomorphisme ψ_n est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.

7. Soit P dans $\mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Justifier qu'il existe un polynôme Q dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $Q' = P$.
   (b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \psi_n(P)(x) = Q(x+1) - Q(x)$.
   (c) Démontrer que $\psi_n(P)'$ le polynôme dérivé du polynôme $\psi_n(P)$ vérifie $\psi_n(P)' = \psi_n(P')$.

Partie II B.

8. Démontrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que :
   (a) $S_0 = 1$,
   (b) $\forall k \in \mathbb{N}, S'_{k+1} = (k+1)S_k$,
   (c) $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 1, \int_0^1 S_k(t)dt = 0$.
9. Expliciter les polynômes S_1, S_2 et S_3.
10. Pour $k \in \mathbb{N}$, démontrer que S_k est un polynôme unitaire de degré k.
11. Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$, démontrer l'égalité $S_k(0) = S_k(1)$.
12. Soit $m \in \mathbb{N}$. Démontrer que S_m vérifie l'équation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ S_m(1-x) = (-1)^m S_m(x).$$

    On pourra utiliser l'unicité de la suite définie par les conditions de la question IIB9.
13. Pour un entier naturel $k \leq n$, démontrer que S_k est l'unique polynôme dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\psi_n(S_k)(X) = X^k$.

Dans toute la suite, on note $\sigma_k = S_k(0)$, pour tout entier naturel $k \leq n$. Ainsi, $\sigma_0 = 1$.

14. Expliciter les valeurs de σ_1, σ_2 et σ_3.
15. On suppose $n \geq 3$. Démontrer que $\sigma_k = 0$, pour tout entier naturel impair k tel que $3 \leq k \leq n$.
16. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma_k x^{n-k}.$$

17. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \sigma_k = 0.$$

18. Expliciter un programme en python qui permet de calculer σ_{50}.

Partie III .

Dans cette partie, on considère la série entière

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{n!} z^n.$$

On **admet** que la série entière à un rayon de convergence $R > 0$. On note D son disque de convergence.

1. Démontrer que pour tout z dans D, $e^z S(z) = z + S(z)$

2. Soit la fonction T définie par :

$$T(z) = \begin{cases} \dfrac{z(e^{2iz}+1)}{(e^{2iz}-1)}, & \text{si } 0 < |z| < \pi \\ 0, & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

   Démontrer qu'il existe un nombre réel ρ, $\rho \in]0, R]$, tel que T admet un développement en série entière sur le disque de centre 0 et de rayon ρ. Exprimer les coefficients de ce développement en série entière en fonction de $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. En utilisant l'égalité (qu'on justifiera)

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}, \quad i\tan x = \frac{2(e^{4ix}+1)}{(e^{4ix}-1)} - \frac{(e^{2ix}+1)}{(e^{2ix}-1)},$$

   déterminer pour tout entier naturel n, une expression de t_n en fonction de σ_n.

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1023 – D'après documents fournis

Rapport sur l'épreuve de Mathématiques PC2 (problème)

Présentation du sujet

L'épreuve consiste en un problème pour une durée de 3 heures. Ce problème était construit autour du développement en série de la fonction tangente et l'expression de ses coefficients en fonction des nombres de Bernoulli : La partie I permettait de justifier le développement en série de la fonction tangente sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La partie II permettait de définir les nombres de Bernoulli comme les coefficients constants des polynômes de Bernoulli. La partie III menait vers la relation entre les nombres de Bernoulli et les coefficients du développement en série de la fonction tangente.

Commentaire général de l'épreuve et Analyse générale

Le sujet se voulait progressif en difficulté. La partie IA était centrée sur la fonction tangente et ses dérivées dans le but de préciser le développement de Taylor-Laplace de la fonction tangente. Cette partie s'est avérée difficile néanmoins pour de nombreux candidats : méconnaissance de la fonction tangente, démonstrations par récurrence incorrectement formulées, difficultés pour dériver une fonction composée. La partie IB plus abstraite a été peu abordée. La manipulation et l'interprétation des inégalités sont trop souvent peu maitrisées. La partie II plus calculatoire a été mieux réussie. Le programme quand il est abordé est le plus souvent correct, mais les candidats ne s'interrogent pas suffisamment sur son efficacité. Le calcul des coefficients binomiaux est, même juste, très souvent extrêmement coûteux, avec des calculs de factorielles inutiles, parfois indépendamment récursives. La dernière partie n'a quasiment pas été abordée. Signalons une erreur de typographie dans la question III2, $T(0)$ vaut $-i$.

Analyse des résultats

L'épreuve a été traitée par 2266 candidats. Les notes sont étalées entre 0 et 20 avec une moyenne de 9.75 et un écart-type 4.49. Les correcteurs ont remarqué de très bonnes copies mais ils ont l'impression que le nombre de très mauvaises copies a augmenté, par rapport aux années précédentes. Ils ont aussi remarqué des démonstrations par récurrence incorrectement formulées plus fréquentes. De fait, les questions élémentaires et la connaissance du cours permettent de classer significativement les copies. La présentation des copies est majoritairement satisfaisante.

Conseil aux futurs candidats

- Prenez votre temps, lisez l'énoncé. Réflechissez à la cohérence du sujet.
- Ne négligez pas les questions élémentaires et les questions de cours. Si on vous demande un énoncé de théorème, il s'agit d'une question de cours et il faut énoncer le théorème. Si de plus, il faut l'appliquer dans une certaine situation, il faut alors vérifier que les hypothèses de l'énoncé sont avérées dans cette situation.
- La représentation du graphe d'une fonction doit être précise. On doit pouvoir lire sur le dessin les réponses aux questions usuelles (comportement à l'infini, éventuelles asymptotes, tangentes aux points remarquables, concavité).
- Soignez vos démonstrations, La précision et la rigueur sont des compétences appréciées dans cette épreuve.
- Un programme doit être correct, c'est-à-dire donner la bonne réponse, mais aussi être efficace. La complexité (même approximative) de votre programme doit faire partie de vos considérations.

022

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

Les quatre exercices sont indépendants

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, on désigne par $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 2 & 0 & n-1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j}$ tous nuls exceptés ceux tels que :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \qquad a_{k+1,k} = n-k, \quad a_{k,k+1} = k.$$

$\boxed{1}$ **1.a)** On prend $n = 2$. A_2 est- elle diagonalisable ? A_2 est-elle inversible ?

1.b) On prend $n = 3$. A_3 est -elle diagonalisable? A_3 est- elle inversible?

$\boxed{2}$ Dans cette question seulement on prend $n = 4$. Soit $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ notée simplement A et soit le polynôme $Q(X) = (X^2-1)(X^2-9)$.

2.a) Calculer les matrices A^2 et $Q(A)$.

2.b) Justifier que A est diagonalisable.

2.c) Déterminer une matrice $\Delta \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients entiers, inversible et telle que $\Delta^{-1}A\Delta = D$ soit une matrice diagonale notée $diag(a,b,c,d)$ avec $a > b > c > d$.

2.d) Montrer que $\Phi : M \mapsto \Delta M \Delta^{-1}$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et justifier que Φ est bijectif.

2.e) Montrer qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ commute avec D si et seulement si N est une matrice diagonale.

2.f) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) / \quad AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et, en utilisant les questions précédentes, déterminer sa dimension.

2.g) Justifier que la famille (I_4, A, A^2, A^3) est une base de $\mathcal{C}_A$ (où $I_4 = diag(1,1,1,1)$).

$\boxed{3}$ On note ici $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré $\leqslant n-1$, et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ la base canonique de E.

Si $P(X) \in E, P'(X)$ désigne le polynôme dérivé de $P(X)$.

3.a) Justifier que l'application $\quad \varphi : P(X) \mapsto (n-1)XP(X) + (1-X^2)P'(X) \quad$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E et calculer $\varphi(X^h)$ pour tout $h \in [\![0, n-1]\!]$.

3.b) Comparer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ et la matrice A_n définie en préliminaire.

3.c) Pour tout $h \in [\![0, n-1]\!]$, on définit le polynôme $P_h = (X-1)^h(X+1)^{n-1-h}$. Déterminer le réel λ_h tel que $\varphi(P_h) = \lambda_h P_h$. Que peut-on déduire de ce calcul ?

3.d) Justifier que la matrice A_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3.e) Préciser selon n dans quel cas A_n est inversible.

3.f) Montrer l'existence d'une matrice $U_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(U_n)^3 = A_n$.

Exercice 2

$\boxed{1}$ **1.a)** Rappeler la définition de la fonction Arctan, ainsi que son tableau de variation et sa dérivée. Justifier que pour tout réel x, on a : $|\operatorname{Arctan}(x)| \leqslant |x|$.

1.b) Étudier et représenter la fonction $g\ :\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[, \qquad g(x) = \operatorname{Arctan}(\tan(x)).$$

1.c) Pour $x > 0$, soit $\psi(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculer la dérivée $\psi'(x)$.

En déduire une relation entre $\operatorname{Arctan}(x)$ et $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.

1.d) Déterminer le développement en série entière de la fonction Arctan sur $]-1,1[$.

$\boxed{2}$ On considère la fonction h définie par $h(0) = 1$ et pour tout réel $x \neq 0$,

$$h(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}.$$

2.a) Justifier que pour tout $x \in [-1,1]$, on a : $h(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)}$.

On traitera le cas $|x| < 1$ et on étendra le résultat au cas $|x| = 1$, en utilisant un argument à préciser sur la continuité sur $[-1,1]$ de la somme de la série de fonctions.

2.b) Justifier que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (*on raisonnera sur $]-1,1[$ puis sur $\mathbb{R}$.*)

$\boxed{3}$ Soit $H(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

3.a) Montrer que H est bien définie et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$; préciser H'.

3.b) Trouver une relation entre $H(x)$ et $G(x) = H(\frac{1}{x})$ pour $x > 0$.
Pour cela, on pourra utiliser G'.

3.c) Soit $f(x) = \dfrac{H(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
Montrer que f est développable en série entière sur $[-1,1]$, et f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3.d) Donner une relation entre $f(x)$ et $f(\frac{1}{x})$ pour $x > 0$.

$\boxed{4}$ Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{t\,(t^2+1)}\,dt$.

4.a) Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

4.b) Montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. *On précisera bien le théorème utilisé.*

4.c) Déterminer $\varphi'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ (avec une expression sans intégrale), si $x \neq 1$ puis $x = 1$. *Pour cela on pourra utiliser la relation :*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right).$$

4.d) En déduire la valeur de $\varphi(x)$ pour tout réel x.

4.e) Si $x \in \mathbb{R}$, justifier l'existence et calculer $K(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Arctan}(x\tan(\theta))}{\tan(\theta)}\,d\theta$.

4.f) En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(\theta))\,d\theta$.

Exercice 3

On considère l'espace vectoriel euclidien orienté $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{B}$ étant orthonormale et directe. On notera $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire tel que si $X, Y \in E$, $\quad \langle X, Y\rangle = {}^tXY$.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

1 On considére les deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ définis par :

$$\mathcal{S}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / \ \forall (X,Y) \in E^2, \quad \langle u(X), Y\rangle = \langle X, u(Y)\rangle\},$$
$$\mathcal{A}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) / \ \forall (X,Y) \in E^2, \quad \langle u(X), Y\rangle = -\langle X, u(Y)\rangle\}.$$

1.a) Justifier que $\mathcal{S}(E)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ (on l'admettra pour $\mathcal{A}(E)$) et montrer que $\mathcal{S}(E) \cap \mathcal{A}(E)$ est réduit à l'endomorphisme nul.

1.b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, avec $u : X \mapsto MX$.

Montrer que :

$(i) \quad u \in \mathcal{S}(E) \Longleftrightarrow {}^tM = M, \qquad\qquad (ii) \quad u \in \mathcal{A}(E) \Longleftrightarrow {}^tM = -M.$

1.c) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. On lui associe $\hat{u} \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(\hat{u}) = {}^tM$.

Montrer que $(u + \hat{u}) \in \mathcal{S}(E)$ et que $(u - \hat{u}) \in \mathcal{A}(E)$

1.d) Conclure que $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$.

2 **2.a)** Soit $\sigma \in \mathcal{S}(E)$. Justifier l'existence de (e_1, e_2, e_3) base orthonormale de E et de trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall\, V \in E, \quad \sigma(V) = \lambda_1\langle e_1, V\rangle e_1 + \lambda_2\langle e_2, V\rangle e_2 + \lambda_3\langle e_3, V\rangle e_3.$$

2.b) Préciser dans quel cas σ est une projection orthogonale, ou alors une symétrie orthogonale.

2.c) **Exemple 1.** Soit σ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer (e_1, e_2, e_3) base orthonormale de E et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ pour σ comme en **2.a)**.

3 Soit $\alpha \in \mathcal{A}(E)$ non nul.

3.a) Montrer que $Ker(\alpha)$ et $Im(\alpha)$ sont orthogonaux, puis que $E = Ker(\alpha) \oplus Im(\alpha)$.

3.b) Montrer que $Im(\alpha)$ est stable par α et que l'endomorphisme $\tilde{\alpha}$ induit par α sur $Im(\alpha)$ ne peut pas avoir de valeur propre (réelle). En déduire que α est de rang 2.

3.c) Justifier l'existence de (e_1, e_2, e_3) base orthonormale directe de E et d'un réel $k \neq 0$ tels que : $\qquad \forall\, V \in E, \quad \alpha(V) = k\left(\langle e_1, V\rangle e_2 - \langle e_2, V\rangle e_1\right).$

3.d) **Exemple 2.** Soit α tel que $Mat_{\mathcal{B}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer (e_1, e_2, e_3) base orthonormale directe de E et $k \neq 0$ associés à α (cf. **3.c)**).

4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et la rotation $r \in SO(E)$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère aussi $\hat{r}$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(\hat{r}) = {}^t\left(Mat_{\mathcal{B}}(r)\right)$.

Donner la décomposition de $\sigma = \dfrac{r + \hat{r}}{2}$ comme en **2.a)**, ainsi que de $\alpha = \dfrac{r - \hat{r}}{2}$ comme en **3.c)** lorsque $\alpha \neq 0$.

Exercice 4

On s'intéresse aux nombres de **Fibonacci** définis par récurrence par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

$\boxed{1}$ **1.a)** Écrire en langage Python une fonction "$fib(n)$" permettant le calcul de F_n.

1.b) On peut démontrer et on l'admettra, que ces nombres vérifient les relations suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$F_n = 2F_{\frac{n}{2}-1}F_{\frac{n}{2}} + (F_{\frac{n}{2}})^2$ si n est pair, $\qquad F_n = (F_{\frac{n-1}{2}+1})^2 + (F_{\frac{n-1}{2}})^2$ si n est impair.

Vérifier cette propriété en calculant ainsi F_6.

Compléter l'écriture de la fonction "$fibb(n)$" ci-dessous permettant de calculer F_n, on commencera au dernier "else" sur la copie en rajoutant les instructions manquantes.

```
def fibb(n):
    if n <= 1:
            return n
    else :
            if n%2 == 0:
                a = fibb(n//2)
                b = fibb(n//2 - 1)
                return a * (2 * b + a)
            else : ...
```

$\boxed{2}$ **2.a)** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer les coefficients de A^n au moyen des nombres de Fibonacci F_{n+1}, F_n et F_{n-1}.

2.b) Écrire en langage Python une fonction "$fibbb(n)$" permettant le calcul de F_n en utilisant le calcul de A^n (dont le calcul doit intervenir dans le programme).

2.c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\quad F_{n+1}F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n$.

$\boxed{3}$ **3.a)** Montrer la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{F_{n+1}F_n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et exprimer $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{F_{n+1}F_n}$ au moyen de $L = \displaystyle\lim_{p \to +\infty} \frac{F_p}{F_{p+1}}$ (dont l'existence résulte de la convergence de la série).

3.b) Grâce à une propriété concernant les séries alternées et que l'on rappellera, étant donné $\varepsilon > 0$, écrire un algorithme (en français ou alors en langage Python) permettant de calculer une valeur approchée de L au moyen d'une somme partielle de cette série, avec une précision inférieure à ε.

$\boxed{4}$ On note $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On peut montrer et on l'admettra, que l'on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \varphi^n\right)$$

4.a) Calculer L de **3.a)** au moyen de Φ.

4.b) Pour tout $x \in]\varphi, -\varphi[$, montrer la convergence de la série ainsi que l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Épreuve de mathématiques 1. (PC e3a 2015)

4 Heures

Présentation

Cette épreuve comportait quatre exercices sur différentes parties du programme et devait permettre aux candidats de montrer leurs compétences face à diverses situations. Le premier exercice est un d'algèbre linéaire, le deuxième d'analyse, le troisième d'algèbre bilinéaire, le quatrième proposait des questions d'informatique appliquées à l'analyse.

2769 candidats ont composé, avec une moyenne de 9,23 et un écart-type de 3,62.

Commentaire général sur l'épreuve.

Le sujet très varié, aborde de nombreuses notions du programme et comportait beaucoup de questions abordables par applications du cours afin d'encourager les candidats, on a effectivement constaté que ces questions étaient en général traitées correctement.

Dans le premier exercice l'une des questions a suscité quelques réactions. On demandait d'évaluer "$Q(A)$" polynôme d'une matrice, notion qui ne fait plus partie du programme, question à la portée très limitée et qui n'avait rien d'indispensable pour la suite de l'exercice. À la vue des copies, il est apparu que peu de candidats en ont génés, et des points ont été attribués avec bienveillance sur l'ensemble de cette première question afin de compenser tout ce qui aurait pu nuire aux candidats. Par ailleurs ce premier exercice a été abordé par tous les candidats avec plus ou moins de réussite et avec des calculs trop souvent mal engagés. Le deuxième exercice a mis en évidence les difficultés de nombreux candidats sur des notions fondamentales de l'analyse ce qui est relativement nouveau, c'est là où l'on constate peut être le plus la dégradation des pratiques : beaucoup de problèmes avec $Arctan$, les dérivations, reconnaitre une primitive pour la dérivée, calculs très imprécis, etc. Les calculs de l'exercice 3, de produits scalaires ou d'utilisation de matrices, ne sont pas toujours compris et donnent souvent l'impression que de nombreux candidats ne comprennent pas le sens de ce qu'ils écrivent ; la faute la plus souvent constatée consiste à penser que si un produit de matrices est nul alors l'un des facteurs l'est. Enfin l'exercice 4 dans une situation extrémement classique (on reconnait en général une situation connue sur la suite de Fibonacci) montre que quasiment tous ont investi dans l'informatique pour tous et le codage python, mais n'ont pas toujours le recul nécessaire (par exemple en traitant la première question par récursivité, ou la pratique de la programmation liée à des calculs matriciels).

Remarque par exercices

Exercice 1

1. Quelques confusions entre inversibilité et diagonalisabilité (et aussi symétrique ou symétrique réelle, scindé ou scindé à racines simples).
2. (a) Le calcul de A^2 n'a pas posé de problème dans l'ensemble. Le calculde $Q(A) = (A^2 - I_4)(A^2 - 9I_4)$ a pu dèrouter quelques candidats, ce dont nous avons tenu compte dans la correction. Le but principal était d'introduire le polynôme Q, polynôme caractéristique de A, comme beaucoup de candidats l'on constaté.

   (b) Évidemment nous n'avons pas pénalisé les 5/2 ou autres, utilisant $Q(A) = 0$ pour en déduire directement la diagonalisabilité de A ce qui a éte fait couramment.

   (c) L'ensemble des candidats sait déterminer les éléments propres d'une matrice, même si quelques-uns n'analysent pas leurs réponses pour en relever quelques incohérences : vecteur propre nul, problème de dimension, etc.

   (d) Le caractère bijectif a rarement été utilisé correctement.

(e) Tous les candidats se sont précipités dans des calculs explicites, avec plus ou moins de rigueur, souvent ne montrant qu'une seule des deux implications, avec quelques raisonnements se concluant par « et forcément les termes non diagonaux sont nuls ».

(f) L'obtention d'une base de $\mathcal{C}_A$ et de sa dimension a posé beaucoup de problème.

(g) Les candidats n'ont pas souvent su exploiter le lien entre A et D et se lancent dans des calculs rarement aboutis, peu de solutions correctes.

3. (a) De bonnes justifications pour l' « endo »morphisme. Le calcul de $\varphi\left(X^h\right)$ n'a pas posé de difficultś, aux erreurs de calculs près.

   (b) Le calcul de $\varphi\left(P_h\right)$ fut globalement laborieux et certains candidats aboutissent à une relation avec un coefficient non constant. L'interprétation pour les éléments propres fût plus délicate tout comme pour préciser le résulat du cours approprié.

   (c) Rarement abordée, ou réponses données sans justification.

   (d) Beaucoup de réponses non justifiées même dans des copies relativement faibles.

   (e) Question rarement abordée mais correctement lorsque c'était le cas.

Exercice 2

1. (a) La définition et les propriétés de la fonction arctan ne sont pas connues de tous et cette première question a réservé bien des surprises avec des maladresses très étonnantes. Ainsi l'inégalité demandée n'est que très rarement correctement justifiée.

   (b) On est très loin de la réussite attendue pour une question d'analyse sans aucune surprise.

   (c) Gros problèmes de dérivation pour de nombreux candidats, en particulier pour une fonction composée.

   (d) Souvent traitée, mais pas toujours avec tous les détails attendus.

2. (a) Correctement traitée que dans les meilleures copies, le problème de la continuité aux bornes de l'intervalle $[-1, 1]$ échappe à la plupart.

   (b) « h est continue car somme infinie de polynômes » est encore une réponse fréquente.

3. (a) Le théorème fondamental de l'intégration n'a pas été régulièrement énoncé ni même envisagé, et le lien entre H' et h n'est pas toujours évident.

   (b) Le lien entre $G'(x)$ et $H'(x)$ a été rarement fait, et la primitivation qui s'en suit n'a guère eu plus de succés.

   (c) Le théorème d'intégration terme-à-terme a régulièrement été utilisé, avec parfois une rédaction lourde ou des oublis d'hypothèses.

   (d) Question très peu abordèe et correctement dans ce cas.

4. (a) La plupart des réponses ont porté sur l'imparité (évidente) de φ. Le problème de convergence et d'intégrabilité a cependant été soulevé par de nombreux candidats, qu'ils ont résolu avec succès pour la plupart.

   (b) Nombreux sont les candidats qui ont repéré la nécessité d'utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la mise en oeuvre étant par contre plus laborieuse, notamment sur l'intégrabilité et domination de $t \longmapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t)$. Le calcul de φ' et la fin de la question n'a pas connu un grand succès.

   (c) (d) (f) Questions rarement abordées, et correctement le cas échéant.

Exercice 3

1. (a) Rares sont les candidats qui font appel à la bilinéarité du produit scalaire pour montrer que $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. L'intersection entre $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{A}(E)$ n'a pas eu beaucoup de succès, rares sont les étudiants capables d'interpréter correctement $\langle u(X), Y\rangle = 0$ pour tous X, Y.
   (b) Rarement correcte, on utilise souvent « X^{-1} » pour obtenir ${}^tM = M$.
   (c) La décomposition sur $\mathcal{S}(E) + \mathcal{A}(E)$ a régulièrement été proposée et la conclusion vue.
2. (a) Peu de candidats citent le théorème spectral.
   (b) Les candidats se contentent souvent de rappeler la définition d'un projecteur ou d'une symétrie, peu font référence à leurs éléments propres.
   (c) Rarement abordée, et pas toujours avec succès. On exhibe rarement une base orthonormée de vecteurs propres.
3. (a) Seule l'orthogonalité entre $\ker(\alpha)$ et $\Im m(\alpha)$ a été globalement bien réussie.
   (b) Peu de candidats font référence aux éléments propres de α pour résoudre cette question, les autres se contentent de soupoudrer leur réponse d'arguments divers et non aboutis
   (c) Quasiment jamais abordée.
   (d) Quelques tentatives, mais quasiment jamais jusqu'à fournir une base orthonormée demandée.
4. Quasiment jamais abordée.

Exercice 4

1. (a) Nombreuses propositions avec un algorithme récursif, et quelques fois avec des problèmes sur les deux premiers termes.
   (b) Très souvent correctement traitée.
2. (a) On calcule en général A^n et on exprime souvent mais sans justifications ses coefficients en fonction des termes de la suite (F_n).
   (b) Fréquents problèmes avec A^{2n} ou A^n et les bons indices à prendre pour conclure.
   (c) Souvent vue soit par le déterminant, soit par une récurrence parfois incomplète.
3. (a) Nombreux reconnaissent une série alternèe, mais qui on a souvent du mal à mettre en oeuvre le critère spécial et vérifier ses hypothèses. Le reste est rarement correct.
   (b) On pressent qu'il faut utiliser la majoration du reste d'une série alternée mais on écrit rarement un algorithme satisfaisant, en particulier pour traduire la condition d'arrêt.
4. (a) (b) De rares tentatives, souvent non abouties.

Analyse des résultats, conseils aux futurs candidats. Conclusion.

La plupart des candidats abordent au moins trois exercices, et la variété des questions a permis un bon étalement des notes. Dans ce type d'épreuve comportant beaucoup de questions il y a souvent moyen de donner des réponses brèves et il on convient de réfléchir aux méthodes à utiliser avant de partir dans des calculs compliqués. Cela fait d'ailleurs partie des nouvelles compétences évaluées.

Nous ne pouvons que conseiller aux candidats de s'efforcer de bien faire, en rédigeant avec précision ce qui est abordé. Une bonne connaissance du cours est indispensable ainsi que la pratique d'exerices d'entraînement pour acquérir un bon savoir-faire. Une lecture attentive et minutieuse du sujet permet d'v́iter de nombreuses erreurs et incohérences. Les correcteurs attendent des réponses argumentées, précises. Les réferences aux résultats du cours doivent être bien rédigées et sans abréviations. Les correcteurs apprécient les copies propres, bien écrites. On aimerait que les candidats fassent preuve de davantage de rigueur dans les preuves demandées.

Nous constatons des différences sensibles entre les candidats, que les calculs posent souvent problème et que la précision des explications n'est pas un impératif pour tous. Nous nous sommes toutefois réjouis de voir de bonnes copies, bien présentées et de bon niveau.

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

090

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice I

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que l'on a : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad (A_\theta)^k = A_{k\theta}$.
   Donner une interprétation géométrique de ce résultat.
2. (a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'on a : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad ({}^tB)^k = {}^t(B^k)$.
   (b) En déduire que le résultat de 1. est vérifié pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On considère l'application φ définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a & -c \\ b & 3d \end{pmatrix}$.

On note $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}$ la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$.

4. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Donner la matrice C de φ dans la base $\mathcal{B}$.
6. La matrice C est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
7. Que vaut le déterminant de φ ? l'endomorphisme φ est-il inversible ?
8. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $f^p = \varphi$.

Exercice II

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note F_1 le point de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(-1, 0)$ et F_2 celui de coordonnées $(1, 0)$.

On considère dans $\mathcal{P}$ la conique $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$ et l'ensemble $\mathcal{L}$ des points M du plan vérifiant $d(M, F_1)d(M, F_2) = 1$ où $d(M, F_1)$ (respectivement $d(M, F_2)$) est la distance euclidienne entre les points M et F_1 (respectivement F_2).

1. (a) Donner la nature de la conique $\mathcal{C}$ puis, en déterminer l'axe focal, le ou les sommets, le centre éventuel et les asymptotes éventuelles.

   (b) Représenter $\mathcal{C}$.

2. Soit M un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$. Montrer que :

$$M \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2).$$

3. Préciser les éventuelles symétries de l'ensemble $\mathcal{L}$.

4. (a) Montrer que, pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\rho = \sqrt{2\cos(2\theta)}$ est une équation polaire de $\mathcal{L}$ dans le quart de plan $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

   (b) Etudier puis représenter $\mathcal{L}$.

5. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

   En identifiant $\mathbb{R}^2$ au plan des complexes, on pourra identifier f à l'application qui à un complexe z associe le complexe z^2.

   (a) Montrer que l'image de $\mathcal{L}$ par f est un cercle de centre F_2 et de rayon à déterminer.

   (b) Montrer que l'image de $\mathcal{C}$ par f est une droite passant par F_2 dont on donnera une équation.

6. On note F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) \qquad G(x, y) = x^2 - y^2 - 1.$$

   (a) Montrer que les ensembles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{C}$ possèdent des points d'intersections dont on déterminera les coordonnées.

   (b) Calculer le gradient de F et de G.

   (c) En déduire qu'en un point d'intersection de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{C}$, les tangentes à $\mathcal{L}$ et à $\mathcal{C}$ sont orthogonales.

   (d) Représenter les ensembles $f(\mathcal{L})$ et $f(\mathcal{C})$. Que remarque-t-on ?

Exercice III

On s'intéresse dans cette exercice à la résolution du problème de Dirichlet suivant :

Etant donné une fonction f, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, on cherche une fonction u définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \Delta u(x,y) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

avec $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
Une fonction u vérifiant ces conditions sera dite solution du problème de Dirichlet avec f pour condition au bord.

On notera i le complexe vérifiant $i^2 = -1$.

1. Soient g et h les fonctions définies par $g(x,y) = \arctan(\frac{x}{y+1})$ pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et $h(x) = \arctan(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Calculer Δg et vérifier que g est solution du problème de Dirichlet avec h pour condition au bord.
2. Soit k la fonction définie par $k(x,y) = e^{x+iy}$ pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.
   (a) Vérifier que k est solution du problème de Dirichlet avec une condition au bord à préciser.
   (b) Montrer que, pour $r \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{re^{i\theta}}\, d\theta = 2\pi$ (on pourra utiliser le développement en série entière de l'exponentielle).
   (c) Soient $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $r > 0$ tel que le cercle de centre (x,y) et de rayon r soit inclus dans le demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Déduire de la question précédente :
   $$k(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(x + r\cos(\theta), y + r\sin(\theta))\, d\theta.$$

On se donne, pour toute la suite de l'exercice, une fonction f, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note, pour $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dx$ les coefficients de Fourier de f.

3. (a) Enoncer le résultat de cours donnant la convergence normale de la série de Fourier d'une fonction vérifiant certaines hypothèses à préciser.
   (b) Vérifier que la série de Fourier de f est normalement convergente.
   (c) Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n>0} (c_{-n}(f) e^{-inx} + c_n(f) e^{inx}) e^{-ny}$ est convergente.

On note alors, pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $u(x,y) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} e^{-|n|y}$.

4. (a) Soit $y_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction $v_{y_0} : x \mapsto u(x, y_0)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée seconde.

   (b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $w_{x_0} : y \mapsto u(x_0, y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée seconde.

5. Montrer que u est solution du problème de Dirichlet avec f pour condition au bord.

6. (a) Justifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} e^{inx}$ puis calculer sa somme.

   (b) On note h la fonction 2π-périodique et continue définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{2}{2 - e^{ix}}.$$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(h) = \dfrac{1}{2^n}$ si $n \geq 0$ et $c_n(h) = 0$ si $n < 0$.

   (c) Calculer la solution du problème de Dirichlet construite à la question 5, avec h pour condition au bord (on donnera une expression sans signe somme de cette solution).

7. On revient au cas général et l'on considère $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $r > 0$ tel que le cercle de centre (x,y) et de rayon r soit inclus dans le demi-plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Montrer que la solution u construite à la question 5. vérifie :

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + r\cos(\theta), y + r\sin(\theta))\, d\theta.$$

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

089

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

Ce sujet a pour objet l'étude du comportement asymptotique des solutions de certaines équations différentielles linéaires du deuxième ordre.
Les deux premières parties, indépendantes entre elles, sont consacrées à des exemples. La troisième partie a pour but d'établir quelques résultats utiles pour la quatrième partie ; ces résultats pourront être éventuellement admis pour traiter la quatrième partie qui est consacrée à l'obtention d'un résultat général.

Toutes les fonctions intervenant dans ce problème sont à valeurs réelles

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Questions préliminaires

1. Énoncer la formule de changement de variable dans une intégrale sur un intervalle quelconque.
2. Énoncer le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre pour une fonction $f : x \in I \mapsto \displaystyle\int_J g(x,t)\,dt$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
3. Énoncer le théorème de convergence dominée.

Première partie

On considère les intégrales impropres suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

1. Justifier l'existence des intégrales I_1 et I_2 et les calculer.
2. Justifier l'existence de I_3 et la calculer en introduisant la fonction $\varphi : u \mapsto \sin u$.
3. On considère la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

   (a) Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

   (b) Démontrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

   (c) Démontrer, en effectuant une intégration par parties, que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0.$$

4. On se donne une fonction q, définie et de classe C^1 sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ telle que

$$\forall x \in I, \quad q'(x) \leq 0$$

et on considère une fonction z de classe C^2 sur I et solution sur I de l'équation différentielle

$$z''(x) + q(x)z(x) = 0.$$

   (a) On note $u : x \mapsto q(x)z^2(x) + (z'(x))^2$. Démontrer que la fonction u est décroissante sur I.

   (b) En déduire que s'il existe un réel $q_0 > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad q(x) \geq q_0,$$

   alors z est bornée sur I.

5. Soit y une fonction définie et de classe C^2 sur $I = [1, +\infty[$ vérifiant

$$\forall x \in I, \quad xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$$

et z la fonction définie sur I par $z(x) = \sqrt{x}\, y(x)$. Déterminer une fonction q telle que

$$\forall x \in I, \quad z''(x) + q(x)z(x) = 0.$$

6. Démontrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |f(x)| \leq \frac{M}{\sqrt{x}}$$

où f est la fonction définie en **3.** de cette partie.

Deuxième partie

Soit y une fonction définie et de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles. On considère alors la fonction z définie sur $]0, +\infty[$ par $z(t) = y\left(\frac{1}{t}\right)$.

1. Démontrer que y est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1): \quad 4x^4 y''(x) - y(x) = 0$$

si et seulement si z est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_2): \quad 4tz''(t) + 8z'(t) - tz(t) = 0.$$

2. (a) Démontrer qu'une série entière $u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ à coefficients réels (a_n) et de rayon de convergence non nul R satisfait

$$\forall t \in]-R, R[, \quad 4tu''(t) + 8u'(t) - tu(t) = 0, \quad u(0) = 1$$

si et seulement si

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = 0, \quad a_{2p} = \frac{1}{4^p (2p+1)!}.$$

(b) Déterminer le rayon de convergence et expliciter la somme de la série entière obtenue en (a) à l'aide des fonctions usuelles.

3. Déterminer une solution y de (E_1) sur $]0, +\infty[$ autre que la fonction nulle telle que $\frac{y(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Troisième partie

1. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout couple (s, u) de nombres réels avec $s \geq u \geq 1$, on ait

$$|f(s) - f(u)| \leq \frac{C}{u}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = f(n^2)$.

(a) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1}(u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On notera L sa limite (on ne demande pas de calculer L).

(c) Démontrer que $f(s) \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

2. Soit g une fonction définie et de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ telle que $g'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(a) Démontrer que g' est bornée sur $[0, +\infty[$. On notera alors M un réel tel que $|g'(x)| \leq M$ pour tout $x \geq 0$.

(b) Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Démontrer, en citant avec soin le théorème utilisé, que

$$\int_0^1 g'(tx_n)\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En déduire que $\dfrac{g(x_n)}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(c) En déduire que $\dfrac{g(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Soit h une fonction définie et de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. On suppose que h' possède une limite finie L en $+\infty$. Démontrer en considérant la fonction $g : x \mapsto h(x) - Lx$ que $\dfrac{h(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

4. En déduire que si u est une fonction définie et de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et telle que u' possède une limite finie L en $+\infty$, alors $\dfrac{u(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

Quatrième partie

On se donne une fonction q définie et continue sur $[1, +\infty[$. On considère sur $[1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) : \quad y''(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Soit y une solution de (E) de classe C^2 sur $[1, +\infty[$.

1. Vérifier que pour tout couple (s, u) de réels tels que $s \geq u \geq 1$, on a

$$y'(s) - y'(u) = -\int_u^s q(t)y(t)\,dt.$$

2. En prenant $u = 1$, déduire du **1.** de cette partie que pour tout réel $x \geq 1$,

$$\frac{y(x)}{x} = \frac{y(1)}{x} + \frac{x-1}{x}y'(1) - \frac{1}{x}\int_1^x \left(\int_1^s q(t)y(t)\,dt\right) ds.$$

On supposera désormais que la fonction $t \mapsto tq(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et en notant

$$r = \int_1^{+\infty} |tq(t)|\,dt,$$

on supposera que $r < 1$.

3. On fixe un réel $A > 1$.

(a) Justifier l'existence du réel $M_A = \max_{x \in [1,A]} \left|\frac{y(x)}{x}\right|$.

(b) Démontrer que pour tout $x \in [1, A]$,

$$\left|\frac{y(x)}{x}\right| \leq |y(1)| + |y'(1)| + \frac{M_A}{x}\int_1^x \left(\int_1^s |tq(t)|\,dt\right) ds.$$

(c) En déduire que

$$M_A \leq \frac{|y(1)| + |y'(1)|}{1 - r}.$$

4. Démontrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{y(x)}{x}$ est bornée sur $[1, +\infty[$.

5. *On suppose de plus que la fonction $t \mapsto t^2 q(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.*

(a) Déduire des questions **1.** et **4.** de cette partie l'existence d'un réel $K > 0$ tel que pour tout couple (s, u) de réels vérifiant $s \geq u \geq 1$, on ait

$$|y'(s) - y'(u)| \leq \frac{K}{u}$$

et en déduire que $y'(x)$ possède une limite finie L lorsque x tend vers $+\infty$.

(b) En déduire que $\dfrac{y(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} L$.

6. Peut-on affirmer, pour toute solution y de l'équation différentielle (E_1) de la **deuxième partie**, l'existence d'une limite à $\dfrac{y(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier la réponse.

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P.

Exercice n°1 :

Cet exercice a pour but d'étudier la décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique réelle définie positive.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre n.
- $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, I_n désigne la matrice identité.
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques réelles.
- Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(f_1,\dots,f_k)$ une famille de vecteurs de E, $\text{Vect}(f_1,\dots,f_k)$ désigne le sous espace vectoriel engendré par la famille $(f_1,\dots,f_k)$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Sp(A) désigne l'ensemble des valeurs propres réelles de A et ${}^tA$ la transposée de A.
- $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

  Par définition, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\text{Sp}(A) \subset]0,+\infty[$.
- $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles **triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs.**
- $\mathbb{R}^n$ sera identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ensemble des matrices réelles avec n lignes et 1 colonne.
  Lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, $\|\ .\ \|$ désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique : $\|X\|^2 = {}^tX\,X$.
- Les candidats seront amenés à utiliser le théorème suivant :
  Théorème d'orthonormalisation de Schmidt : Si (E,(. | .)) est un espace préhilbertien réel, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1,\dots,f_p)$ une famille libre de E, alors il existe une unique famille orthonormale $(g_1,\dots,g_p)$ telle que pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$:

  $$\text{Vect}(f_1,\dots,f_k)=\text{Vect}(g_1,\dots,g_k) \text{ et } (f_k \mid g_k) > 0.$$

  La famille $(g_1,\dots,g_p)$ s'appelle alors l'orthonormalisée de Schmidt de $(f_1,\dots,f_p)$.

I. Etude d'un exemple numérique :

On considère, dans cette question I uniquement, la matrice $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) Enoncer le théorème qui permet de justifier qu'il existe une matrice $O \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tOSO = D$ où D est une matrice diagonale.

2) Déterminer O et D telles que $\underline{\det(O)=1}$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ où $\underline{\alpha < \beta < \gamma}$ puis justifier que $S \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$.

3) Démontrer qu'il existe une unique matrice $T \in \mathcal{T}_3^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tT\,T$. On explicitera la matrice T.

II. Résultats préliminaires :

1) On considère $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que :

$$\varphi_S : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (X,Y) \mapsto {}^tX\, S\, Y \end{cases} \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^n.$$

2) Proposition : $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Démontrer cette proposition pour $n=2$. Dans la suite, on admettra le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III. Une caractérisation des matrices symétriques réelles définies positives :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $B = {}^tA\,A$.

1) Montrer que $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre associé à λ, alors
$\|Ax\|^2 = \lambda \|x\|^2$ en déduire que $\lambda \in [0,+\infty[$.

3) En déduire que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

IV. Décomposition de Cholesky :

Le but de cette question est de montrer le théorème suivant :
Théorème : $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe une unique matrice $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tT\,T$. Cette décomposition s'appelle décomposition de Cholesky de S.

On considère $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que s'il existe $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tT\,T$ alors $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2) On suppose qu'il existe T_1, T_2 deux matrices de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que ${}^tT_1\,T_1 = {}^tT_2\,T_2$.

a) Montrer que $\Delta = T_1\,(T_2)^{-1}$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs. (utiliser II.2))
b) En déduire, en utilisant ${}^tT_1\,T_1 = {}^tT_2\,T_2$, que $\Delta^2 = I_n$.
c) En déduire que $T_1 = T_2$.

3) On suppose $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on considère φ_S le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ défini en II.1). Soit b$=(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et b'$=(v_1,\dots,v_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de b pour le produit scalaire φ_S.
On note T la matrice de passage de la base b' à la base b.

a) Montrer $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$.
b) Montrer que $S = {}^tT\,T$.

Exercice n°2 :

Dans cet exercice, g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t\neq 0\\ 1 & \text{si } t=0\end{cases}$.

1) Enoncer le théorème de dérivation pour les fonctions définies par :
$F: x\in I\mapsto \int_J f(x,t)dt$ où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

2) Etude de g :

a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que g a un développement limité en 0 à l'ordre 1.
En déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser $g'(0)$.
c) Déterminer le signe pour $t\in\mathbb{R}$ de $(1+t)e^{-t}-1$.
d) Dresser le tableau de variations de g et tracer le graphe de g.
e) i) Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction g, préciser le rayon de convergence de la série entière.
ii) Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et préciser pour tout k$\in\mathbb{N}$, $g^{(k)}(0)$ (énoncer le (ou les) théorème(s) utilisé(s)).

3) On considère la fonction h définie par $h(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{1-e^{-xt}}{t}\sin(\mathrm{t})\,dt$.

a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(u)}{u}du$ converge (on pourra utiliser une intégration par parties).

On notera alors α la valeur de cette intégrale et on pourra écrire
$$h(x)=\alpha-\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt.$$

b) En déduire que h est définie sur $[0,+\infty[$. Que vaut $h(0)$?
c) Montrer que h est dérivable sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ (a>0).
En déduire que pour tout $x>0$, $h'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.
d) Montrer que pour tout $x>0$: $h(x)=\int_0^{+\infty}g(u)\sin\left(\dfrac{u}{x}\right)du$.
e) En déduire que pour tout $x>0$: $h(x)=x+x\int_0^{+\infty}g'(u)\cos\left(\dfrac{u}{x}\right)du$.
f) En déduire que pour tout $x>0$: $|h(x)|\leq 2x$.
g) Montrer que h est continue sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $x\geq 0$: $h(x)=\mathrm{Arctan}(x)$.
h) En déduire que $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice n°3 :

On se place dans le plan affine euclidien et on considère :

- F un point du plan.
- $\mathcal{D}$ une droite du plan ne contenant pas F.
- Δ la droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par F et A le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ.
- p la distance AF.
- S le milieu du segment $[AF]$.

Le but de cet exercice est l'étude de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$.
Par définition $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points équidistants de F et de $\mathcal{D}$:
$M \in \mathcal{P}$ si, et seulement si, $MF = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

On considère le repère orthonormé direct $\Re = \left(S, \vec{i}, \vec{j}\right)$ où $\vec{i} = \frac{1}{p}\overrightarrow{AF}$.

1)

a) Donner les coordonnées dans $\Re$ de A, S, F et une équation de la droite $\mathcal{D}$.

b) On considère M de coordonnées $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ dans $\Re$, montrer que $M \in \mathcal{P}$ ssi $y^2 = 2px$.

2) $\mathcal{P}$ est alors paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{2p} \\ y(t) = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. On considère $t_0 \in \mathbb{R}$ et M_0 le point de $\mathcal{P}$ de paramètre t_0.

a) Donner une équation de $\mathcal{T}_0$ la tangente à $\mathcal{P}$ en M_0 et de $\mathcal{N}_0$ la normale à $\mathcal{P}$ en M_0.

b) On note H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{D}$.

i) Donner la nature du triangle FH_0M_0.

ii) Vérifier que $\mathcal{T}_0$ est la médiatrice du segment $[FH_0]$.

3)

a) Déterminer en M_0 le repère de Frenet de $\mathcal{P}$ noté $\left(M_0, \overrightarrow{T_0}, \overrightarrow{N_0}\right)$.

b) Déterminer en M_0 le rayon de courbure de $\mathcal{P}$ noté R_0.

c) On appelle centre de courbure en M_0 à $\mathcal{P}$ noté Ω_0 le point défini par $\overrightarrow{M_0\Omega_0} = R_0\overrightarrow{N_0}$, déterminer dans $\Re$ les coordonnées de Ω_0.

4) On considère la courbe paramétrée $(\mathcal{C})$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} x(t) = 2 + \dfrac{3}{4}t^2 \\ y(t) = -\dfrac{t^3}{4} \end{cases}$.

a) Etudier la symétrie de $(\mathcal{C})$.

b) Dresser le tableau de variations des fonctions x et y.

c) Etudier avec précision le point stationnaire de $(\mathcal{C})$.

d) Etudier la branche infinie de $(\mathcal{C})$ lorsque t tend vers $+\infty$.

e) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la courbe $(\mathcal{P})$ (pour p=2) sur une même figure.

****

Epreuve de Mathématiques B : E3A PC 2013

Présentation du sujet :

Le sujet était constitué de trois exercices indépendants :

- L’exercice 1 était un exercice d’algèbre qui avait pour but d’étudier la décomposition de Cholesky d’une matrice symétrique réelle définie positive.
- L’exercice 2 était un exercice d’analyse qui avait pour finalité l’étude d’une fonction définie par une intégrale généralisée.
- L’exercice 3 était un exercice de géométrie qui avait pour objet l’étude des paraboles et de leur développée (lieu des centres de courbure).

Le sujet était conforme aux programmes des classes PCSI-PC, il couvrait une grande partie du programme de mathématiques des classes du secondaire, de PCSI et de PC, les étudiants étaient très guidés dans chaque exercice. Il a permis d’évaluer le travail fourni par les candidats lors de leur scolarité en classe préparatoire aux grandes écoles.
Le sujet était certes long, il était difficile pour un candidat de traiter toutes les questions, cela permettait à un étudiant de pouvoir toujours commencer une nouvelle question et donc de travailler pendant les trois heures. Le barème a tenu compte de cette longueur.

Commentaires généraux / Analyse des résultats :

Dans l’ensemble les copies corrigées étaient faibles avec de grosses lacunes et un manque de savoir faire sur les techniques fondamentales des mathématiques. Le travail fourni par les candidats en Mathématiques est globalement insuffisant.

Presque tous les candidats abordent les exercices 1 et 2 : l’exercice 2 est celui où le nombre de questions traitées est le plus important. Par contre l’exercice 3 est délaissé à tort (de très nombreux points étaient très facilement accessibles) par presque tous les candidats : près d’1/3 n’abordent pas du tout l’exercice et plus d’1/3 se contentent de l’étude des variations des fonctions x et y de la courbe paramétrée.
Les candidats ne sont pas très à l’aise en Algèbre (produit scalaire, notion de sous-groupe, partie théorique…) , pour ce qui est de l’Analyse une faiblesse dans les techniques de bases (études de fonctions, continuité, développements limités, branches infinies…) et enfin les savoirs relatifs à la Géométrie sont souvent inexistants !
La correction des exercices 2 et 3 a mis en évidence de grosses faiblesses mathématiques dans le programme du secondaire : signe d’une fonction par étude de ses variations, tracer un graphe précis et soigné, coordonnées, équations de droites, déterminer une équation de tangente, manipuler des expressions mathématiques.

Un nombre croissant de copies très faibles alors que de nombreux points étaient extrêmement faciles à gagner et pourtant un nombre significatif de candidats ont une note très proche de 0.
En parallèle quelques copies excellentes et qui traitent très bien une très grande partie du problème. L’objectif qui était d'utiliser toute l'échelle de notes, pour bien classer les candidats, est dans l’ensemble atteint. Pour finir une disparité très nette entre les centres d’examen : phénomène qui s’accentue avec les années : des paquets de 20 copies de centres différents peuvent avoir des moyennes qui varient du simple au quadruple !
La plupart des candidats ont fait un réel effort de présentation (très peu de copies illisibles) ce qu’il faut évidemment encourager. Il est à regretter toutefois que de nombreuses copies manquent parfois de rédaction, de justifications claires, de calculs concis.

Analyse par exercices :

Exercice n°1 :

I)

1) La question était clairement formulée : énoncer un théorème du cours.
Seul 1/3 des candidats énoncent correctement le théorème spectral qui ne concerne que les matrices symétriques **réelles**.
Parfois ; confusion entre base et base orthonormée de diagonalisation.
2) La détermination des éléments propres de S ne pose en général pas de soucis sauf curieusement pour le sous espace propre associé à 2 qui est le plus simple.
Rares sont les candidats qui justifient correctement que leur matrice O est orthogonale même s'ils pensent à normer leurs vecteurs propres. Bon nombre d'entre eux se contentent d'ajuster un des vecteurs propres pour avoir un déterminant de 1 sans se soucier de l'orthogonalité de la matrice.
3) Question bien traitée lorsque les candidats cherchent explicitement la matrice T, ceux qui essaient d'utiliser 2) n'aboutissent pas à une matrice symétrique triangulaire sans parfois s'en rendre compte.
Quelques confusions entre triangulaire supérieure et inférieure.

II)

1) Question ultra classique qui pourtant s'est révélée très décevante.
La symétrie est souvent mal justifiée, même la bilinéarité pose des problèmes à certains candidats (parfois il n'y a que la stabilité par . ou par +), quant au caractère défini positif il est très rarement bien montré.
Les candidats sérieux auraient dû récupérer les nombreux points de cette question, hélas ce ne fut pas le cas.
2) La notion de sous-groupe est totalement inconnue des candidats : souvent un sous groupe est seulement un sous-ensemble, confusion avec les sous espaces vectoriels, la stabilité par le produit est rarement faite et celle pour l'inverse encore moins.
Que de mauvaise foi dans cette question par exemple : « la matrice nulle est à diagonale strictement positive » !

III)

1) Question très facile plutôt bien traitée, quelques candidats ne connaissent pas les propriétés de la transposition, d'autres se lancent dans des expressions matricielles.
2) Question facile qui a posé des problèmes à plus de la moitié des candidats.
Les candidats manipulent formellement des expressions sans aucune cohérence : confusion entre norme, vecteurs, matrices, scalaires, commutativité des termes...
Très souvent : $\|A\|^2={}^tAA$!
De nombreux étudiants ne précisent pas qu'un vecteur propre est non nul.
3) Question fort mal traitée dans l'ensemble, de nombreux candidats manipulent les matrices comme des scalaires : $Ax=0$ avec $A\neq 0$ donne $x=0$…

IV)

1) Certains candidats recommencent les calculs plutôt que d'utiliser les questions précédentes.
2) Questions peu traitées par les candidats.
   a) Les candidats arrivent souvent à montrer que la matrice est dans $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ mais affirment d'emblée que la matrice est diagonale.
   b) Quelques candidats se débrouillent bien d'autres font preuve de beaucoup de mauvaise foi.
   c) Question plus simple mais pas forcément mieux réussie.
3) Questions plus délicates, très rarement traitées par les candidats.

Exercice n°2 :

1) Question de cours, plutôt bien traitée même si parfois il manque des hypothèses ou la conclusion, il y a quelquefois confusion entre continuité et continuité par morceaux. Encore une fois, il faut encourager les étudiants à apprendre par cœur les résultats du cours pour ne pas perdre de points dans une question comme celle-ci et dans les questions d'applications directes ensuite.
   L'hypothèse la plus souvent oubliée est l'intégrabilité sur J de $t \mapsto f(x,t)$ alors que l'hypothèse de domination assure l'intégrabilité sur J de $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.
2) C'est certainement la question qui a réservé le plus de surprises dans sa correction.
   a) La continuité sur $\mathbb{R}^*$ est souvent signalée, mais la continuité en 0 pose des problèmes à un nombre significatif de candidats (tout prolongement est continu, pas de recours aux limites ou alors très mal…)
   b) Question très facile et pourtant très mal traitée : ignorance de ce qu'est un développement limité, confusion dans l'ordre, oubli des restes…
   Le lien entre développement limité et dérivabilité est rarement bien cité, pour certains la dérivabilité découle de la continuité.
   c) Question de niveau Terminale qui a posé des problèmes à plus de la moitié des candidats. Signalons quelques candidats qui utilisent fort bien la convexité de l'exponentielle. D'autres au contraire font des tableaux de signe pour les sommes, ne savent pas dériver l'exponentielle et ne maitrisent pas la notion d'extremum…
   d) Pour cette question aussi, les techniques d'étude de fonctions sont mal maitrisées. L'étude locale faite en 0 en b) apparait rarement dans le tableau de variations.
   Les limites sont parfois inexistantes ou fantaisistes.
   Attention aux graphes qui sont volontairement bien notés mais ils doivent être soignés cohérents avec l'étude faite, lorsqu'un point est placé la tangente en ce point doit l'être également.
   e) i) Quelques problèmes de signes, le domaine de validité du développement en série entière est rarement précisé, souvent les étudiants se lancent dans un calcul de rayon de convergence (inutile ici) mais c'est souvent imprécis (problème de valeur absolue…) ou fantaisiste.
   Dans cette question il fallait traiter à part le cas t=0, très peu de candidats y pensent.
   ii) Peu de justifications convaincantes, de nombreux candidats essaient (sans y parvenir) de redémontrer le résultat de cours sur la régularité des séries entières.
   Très peu de justifications pour le calcul de $g^{(k)}(0)$.
3)
   a) Question très classique faite en cours par la plupart des enseignants et pourtant très peu de candidats traitent bien cette question complètement.
   L'intégrabilité au voisinage de 0 n'est traitée correctement que par la moitié des candidats. Très peu de justification des intégrations par parties, très souvent les intégrales obtenues sont divergentes par suite du problème en 0 !
   De très nombreuses confusions entre absolue convergence et convergence.
   b) Question fort mal traitée dans l'ensemble, De nombreux candidats majorent par $\left|\frac{\sin t}{t}\right|$ (pire par $\frac{\sin t}{t}$!) alors que la fonction n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$!
   c) Certains candidats énoncent bien le théorème en 1) mais oublient de vérifier les hypothèses dans cette question, le passage du local au global est rarement traité.

L'hypothèse de domination est souvent fausse (comme en b).
La double intégration par parties ou l'utilisation d'exponentielle complexe sont rarement correctement justifiées.

d) La justification du changement de variables est très rarement faite.

Les questions e) à h) sont rarement traitées.

e) Comme en c), l'intégration par parties lorsqu'elle est faite n'est que très rarement justifiée.
f) Beaucoup de majorations très fantaisistes, quelques très rares candidats voient que $|g'|=-g$.
g) La continuité en 0 (pourtant facile) pose des problèmes aux candidats, ils essaient en vain d'utiliser le théorème de continuité sous le signe intégral.
Pour la constante d'intégration très peu de candidats font intervenir la continuité de h en 0.
h) La limite de h en $+\infty$ pose des problèmes aux candidats qui essaient d'aborder cette question.

<u>Exercice n°3</u> :

1) Peu de candidats font une figure.
   a) Que de coordonnées fantaisistes, la notion même d'équation de droite pose des problèmes à un nombre significatif de candidats.
   b) Quelques candidats essaient d'utiliser maladroitement le cours (équation réduite d'une parabole dans le repère…).
2)
   a) Là encore des équations de droites très fantaisistes !
   b) i) Bien traitée lorsque la question est abordée. Quelques triangles rectangles.
   ii) Question très rarement traitée.
3)
   a) Quelques candidats traitent bien ces questions, le vecteur $\overrightarrow{N}$ est souvent cohérent avec le vecteur $\overrightarrow{T}$ même si celui-ci est faux.
   b) et c) Très rarement traitées, les très rares candidats qui font ces questions le font bien.
4)
   a) Que de symétries fantaisistes : une symétrie pour les x et une autre pour les y.
   b) Seule question convenablement traitée de l'exercice.
   c) Rarement bien traitée.
   d) Problème de vocabulaire et de méthodes pour étudier les branches infinies. Les candidats savent en général qu'il faut étudier la limite du quotient $\frac{y}{x}$ mais en grande majorité ne savent pas exploiter cette limite.
   e) Quelques jolies courbes mais rarement complètes.

Conseils aux futurs candidats :

Il faut apprendre à ne pas perdre de nombreux points faciles à glaner :

- Enoncer correctement les théorèmes demandés qu'il faut apprendre par cœur !
- Bien lire l'énoncé : parfois il est demandé d'énoncer un théorème du cours sans en faire la preuve, parfois il est demandé de redémontrer un résultat du cours.
- Il faut lire la totalité d'une partie avant d'aborder les questions ce qui permet parfois de ne pas se lancer dans de fausses pistes.
- Chercher sérieusement au minimum la moitié de chaque exercice où les questions posées sont souvent plus axées vers les applications directes du cours et relativement bien notées.
- Faire des graphes précis et soignés où figurent des tangentes et qui traduisent une étude précédente
- Vérifier systématiquement les hypothèses d'un théorème avant de l'appliquer.

Voici quelques domaines où il faut accentuer ses révisions :

- La géométrie dans son ensemble !
- Les intégrales généralisées, les inégalités (de nombreux candidats font n'importe quoi), les études de fonctions, les développements limités.

Il faut se laisser quelques minutes de relecture et faire preuve d'esprit critique : vérifier la cohérence de ces calculs, l'homogénéité des expressions, les étourderies…
Attention pour certains au soin : éviter les ratures et l'utilisation du correcteur à outrance, utiliser de la couleur et encadrer les résultats.

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les trois parties sont relativement indépendantes.

Tournez la page S.V.P.

Préambule

On rappelle la définition des fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose : $\quad \mathrm{ch}(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \mathrm{sh}(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}.$

a) Préciser un équivalent simple de $\mathrm{ch}(t)$ et de $\mathrm{sh}(t)$ lorsque le réel t tend vers $+\infty$.

b) Établir les tableaux de variation (avec les limites aux bornes) des deux fonctions définies sur $]0, +\infty[$: $\quad g_1 : t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$ et $\quad g_2 : t \mapsto \dfrac{t}{\mathrm{sh}(t)}$.

Partie I : Intégrales et développements en série

I-1.1. Justifier l'existence de : $\quad I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I-1.2. Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n.

I-1.3. Calculer I_0. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I-1.4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha > 0$, la valeur de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t}\, dt$.

I-2.1. Justifier que pour tout $t \geq 0$, on a: $\quad \dfrac{e^t}{2} \leq \mathrm{ch}(t) \leq e^t$

I-2.2. En déduire l'existence de $C_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\mathrm{ch}(t)}\, dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi qu'un encadrement du rapport $\dfrac{C_n}{I_n}$.

I-2.3. Grâce au calcul de la dérivée de la fonction $\quad t \mapsto \mathrm{Arctan}(e^t), \quad$ calculer C_0.

I-2.4. Justifier l'égalité pour tout réel $t > 0$: $\quad \dfrac{1}{2\,\mathrm{ch}(t)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t}.$

I-2.5. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n = 2\,(n!) \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}.$

On énoncera et on appliquera avec soin le théorème d'intégration terme à terme utilisé.

I-2.6. Montrer que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$.

I-3.1. Montrer l'existence de : $\quad S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\mathrm{sh}(t)}\, dt \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I-3.2. Justifier l'égalité pour tout réel $t > 0$: $\quad \dfrac{1}{2\,\mathrm{sh}(t)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)t}.$

I-3.3. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = 2\,(n!) \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}.$

I-4. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire telle que :

$$\varphi(t) = 1 \quad \text{si } t \in]0, \pi[\qquad \text{et} \qquad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0.$$

I-4.1. Déterminer les coefficients de Fourier $b_n(\varphi)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

I-4.2. Grâce à des résultats que l'on précisera sur les séries de Fourier et appliqués à φ retrouver la valeur de C_0 et donner la valeur de S_1.

Partie II : Intégrales à paramètre

II-1. Pour tout réel x on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\operatorname{ch}(t)}\,dt$

II-1.1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, exprimer $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

II-1.2. Montrer que F est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$. Justifier grâce à **I-2.2** que le rayon de convergence de ce développement vaut 1.

Pour cela on exprimera d'abord e^{ixt} *comme somme d'une série.*

II-1.3. En effectuant une intégration par parties, majorer $|xF(x)|$ indépendamment du réel x. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

II-2. Pour tout réel x on pose : $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch}(t)}\,dt$

II-2.1. Soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant **I-2.4**, justifier que :

$$\left| \frac{1}{2\operatorname{ch}(t)} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-(2k+1)t} \right| \leq e^{-(2n+3)t}$$

II-2.2. En déduire que pour tout réel x et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left| H(x) - \sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k \left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt)\,dt \right) \right| \leq 2 \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t}\,dt.$$

II-2.3. Pour tout réel x et tout $k \in \mathbb{N}$, calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt)\,dt.$

II-2.4. Conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 + x^2}.$$

II-3. Soit $x \in \mathbb{R}$ **fixé**. On considère $h_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire telle que :

$$h_x(t) = \operatorname{sh}(xt) \quad \text{si } t \in]-\pi, \pi[\qquad \text{et} \qquad h_x(\pi) = h_x(-\pi) = 0.$$

II-3.1. Justifier que h_x est égale à la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

II-3.2. Déterminer les coefficients de Fourier : $b_n(h_x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II-3.3. En déduire : $H(x) = \dfrac{\pi}{2\operatorname{ch}\left(\frac{x\pi}{2}\right)}$.

On pourra admettre la relation, valable pour tout réel a *:* $\operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(a)$.

Partie III : Étude d'une équation différentielle

On s'intéresse ici à : $\mathcal{S} = \{y \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})/ \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) - y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}\}$.

III-1. En utilisant ch et sh, déterminer toutes les $y \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $y'' = y$.

III-2.1. Donner la forme générale d'une solution $y \in \mathcal{S}$.

On rappelle qu'il y a au moins deux méthodes possibles de résolution :
soit en posant $y(t) = u(t)\operatorname{ch}(t) + v(t)\operatorname{sh}(t)$, *soit en posant* $y(t) = z(t)\operatorname{ch}(t)$ *;*
avec des conditions sur les fonctions u *et* v*, ou sur la fonction* z*, qui seront précisées en cas d'utilisation de l'une de ces méthodes.*

III-2.2. Existe-t-il des solutions impaires dans $\mathcal{S}$?

III-2.3. Expliciter l'unique solution $\theta \in \mathcal{S}$, paire et telle $\theta(0) = 1$.

III-3.1. Déterminer explicitement l'unique suite réelle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{2k}.$$

III-3.2. Montrer l'existence et l'unicité d'une unique suite réelle (que l'on ne cherchera pas à déterminer explicitement, mais que l'on définira par récurrence) $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$b_0 a_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = 0.$$

III-3.3. Préciser b_0, b_1, b_2.

III-3.4. Démontrer par récurrence : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |b_n| \leq 1$.

On pourra considérer comme connu que $\operatorname{ch}(1) \leq 2$.

III-3.5. En déduire que pour tout $t \in]-1,1[$, la série $g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^{2n}$ converge absolument, avec de plus : $\operatorname{ch}(t)g(t) = 1$.

Remarque : On a ainsi prouvé que $t \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)}$ *est développable en série entière sur* $]-1,1[$.

III-4. On suppose qu'il existe une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = 1$ et telle que la série entière définie par $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^{2n}$ ait un rayon de convergence $R \geq 1$, et vérifie :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad f''(t) - f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}.$$

III-4.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre u_{n+1}, u_n et b_n.

III-4.2. En déduire qu'une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique et montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| \leq 1$$

III-4.3. En déduire que la fonction θ considérée en **III- 2.3** est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$.

III-4.4. Justifier que $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$.

Fin de l'énoncé.

Rapport sur l'épreuve de mathématiques A- PC, 2013

.

L'épreuve portait sur un problème d'analyse en trois parties. Une première partie consacrée à l'étude d'intégrales et développement en séries, la deuxième à des fonctions définies par une intégrale et des séries de fonctions, enfin la troisième à l'étude de solutions d'une équation différentielle. Cela a permis d'explorer un large éventail de notions du programme d'analyse.

Des questions de niveau variable ou de difficulté diverse ont permis en général aux candidats de ne pas être bloqué et de montrer ce qu'ils savaient faire. Un bon nombre de candidats ayant réussi à traiter correctement de nombreuses questions, avec de bonnes copies. Les correcteurs ont eu une impression plutôt positive et avec un bon étalement des notes. Egalement positif: en général les copies sont bien présentées et les candidats font visiblement des efforts de présentation. Très peu de copies brouillon ou difficile à déchiffrer pour manque de soins. Les énoncés de théorèmes sont souvent parfaitement retranscrits dans de nombreuses copies, même si la mise en application pêche parfois ensuite. Le plus gros défaut rendant illisibles certaines copies est l'usage abusif d'abréviations.

Néanmoins on a pu relever un certains d'erreurs ou d'imprécisions de gravité variable. Il est en particulier surprenant de voir certains candidats incapables de venir à bout de l'étude d'une fonction dès le préambule , avec souvent d'ailleurs une erreur de lecture d'énoncé fréquente et inexplicable. L'étude de limites ou d'équivalents manque de pratique et avec des affirmations fausses étonnantes. Les calculs des intégrales plutôt courantes du début n'est pas toujours correct. Plus généralement la manipulation d'intégrales ou de séries ne se fait pas toujours avec l'aisance attendue. On a vu ainsi un nombre inquiétant de candidats n'hésitant pas à simplifier le quotient d'intégrales par l'intégrale du quotient des deux fonctions à l'intérieur, et une grande surprise également sur la difficulté à reconnaitre la somme d'une série géométrique et préciser sa convergence et sa somme.

Grande diversité de traitement concernant aussi l'application des théorèmes importants du cours: savoir les citer avec précision sur les hypothèses puis vérifier qu'il s'applique est réservé aux meilleurs candidats. En général cela est souvent approximatif et incomplet. Citons ainsi le cas du théorème de continuité ou de classe C^1 sur l'intégrale à paramètre, le théorème d'intégration terme-à-terme qui devait être ici bien compris et justifié, ou les théorèmes sur les séries de Fourier. On ajoute parfois des conditions superfétatoires et fantaisistes au théorème de dérivation sous le signe intégral. Le théorème de Dirichlet sur les séries de Fourier est presque systématiquement confondu avec le théorème de convergence normale. Beaucoup de candidats mettent en évidence la non compréhension des notions étudiées dans le programme. Par exemple certains jugent la fonction en créneaux du I.4 comme continue, juste en dessous de sa représentation graphique clairement discontinue! L'examen de la régularisation des fonctions aux points de discontinuité est réservée aux candidats consciencieux.

Trop de candidats ignorent la bonne expression des coefficients de Fourier ou de la formule de Parseval. Comment espérer rendre une composition de mathématiques convenable lorsque les connaissances sont aussi lacunaires? La manipulation d'inégalités avec des nombres complexes (II.1) est fréquente, et ne refroidit pas le candidat téméraire qui ne recule devant rien. Pourtant très accessible, la question II.2. 2 a été également particulièrement "saccagée". Le point de départ d'un raisonnement n'est pas nécessairement le résultat de la ligne précédente. Concernant les séries entières du problème, peu de candidats ont su donner une estimation de leur rayon de convergence en revenant à la définition plutôt que par la règle de d'Alembert qui n'est pas sensée toujours s'appliquer.

La partie III nous a aussi réservé quelques surprises. Que penseront nos collègues physiciens d'entendre que beaucoup de candidats se sont montrés incapables de résoudre l'équation différentielle $y'' = y$, ou de donner une quelconque justification de résolution, ou encore d'exprimer comme demandé la solution générale grâce aux fonctions ch et sh, au mieux on applique sans avoir l'air de comprendre des résultats mystérieux. La recherche d'une solution particulière s'est avéré plus sélective encore avec une issue correcte seulement dans les meilleurs copies.

La fin du problème consistait à justifier des développements en série entière de fonctions définies par quotient ou composition, ce qui était délicat mais avec une marche à suivre précisée par le texte et que certains ont compris. La notion de récurrence forte est absente de la quasi intégralité des copies. Là aussi une grande variété de réaction entre les candidats les moins performants qui se se limitent au développement en série entière demandé de ch, ou répondent aux questions explicites du texte, et les meilleurs candidats qui comprennent bien l'usage des raisonnements par récurrence et les conclusions à donner sur les rayons de convergence.

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

EXERCICE 1

On note $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 \in E \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$$

Pour tout réel $a > 0$, on note $I_a = [-a, a]$.

1. Donner l'expression du développement en série entière de la fonction exponentielle et préciser son domaine de validité.

2. Soient g un élément de E et β un réel.

2.1 Démontrer que l'application $G : x \longmapsto G(x) = e^x \displaystyle\int_\beta^x g(t)\,e^{-t}\,dt$ est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E}) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) - y(x) = g(x)$$

2.2 Calculer $G(\beta)$.

2.3 Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E})$.

2.4 Énoncer un problème de Cauchy, lié à l'équation $(\mathscr{E})$, dont G est l'unique solution.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Résoudre l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda\, y''(x) - (1+\lambda)\, y'(x) = 0$$

4. Démontrer qu'il existe une constante $M \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall x \in I_a,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |f_k(x)| \leqslant M\, \frac{|x|^k}{k!}$$

5. Démontrer alors que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction F.

6. Démontrer que F est de classe C^1 sur I_a, puis sur $\mathbb{R}$.

7. Calculer $F(0)$.

8. Prouver que F est solution d'un problème de Cauchy associé à une équation différentielle linéaire du premier ordre.

9. Donner alors une expression de F en fonction de f_0.

10. Dans cette question, on prend $f_0 : x \in \mathbb{R} \longmapsto f_0(x) = x^2$. Déterminer précisément F.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$.

11.1 Prouver qu'il existe des scalaires $(a_0, ..., a_n)$, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f_{n+1}^{(n+1)}(t)\,dt$$

11.2 Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f_0(t)\,dt$$

11.3 En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \int_0^x f_0(t) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-t)^k}{k!} \right) dt$$

11.4 Retrouver alors l'expression de F obtenue à la question 9.

12. Soit $\psi : f \in E \longmapsto H = \psi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad H(x) = e^{x} \int_{0}^{x} f(t)\, e^{-t}\, dt$$

12.1 Vérifier que ψ est un endomorphisme de E.

12.2 ψ est-elle injective ?

12.3 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ψ.

Exercice 2

Question préliminaire :

Soient α et β deux réels strictement positifs. Vérifier que : $(1+\alpha)(1+\beta) \geqslant (1+\alpha+\beta)$

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.

On pose : $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix}$ et pour $n \geqslant 3$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & -v_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

et on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n\, v_n$.

1. Calculer Δ_1 et Δ_2.

2. Démontrer que :

$$\forall n \geqslant 3, \qquad \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n\, \Delta_{n-2}$$

3. Prouver que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \Delta_n \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1+a_k)$$

On pourra utiliser un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel j.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+a_k)$ et on suppose dans cette question que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

5.1 Prouver que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

5.2 Que peut-on en déduire pour la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

6. On suppose maintenant que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

6.1 Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n \geqslant 1$.

6.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, on pose $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$

Etudier la nature de la série : $\sum_{n\geqslant 2} t_n$.

6.3 Prouver alors que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

7. Quel résultat a-t-on finalement établi ?

Exercice 3

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\mathscr{D}$ la courbe d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 3 - 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

1. Soit $\mathscr{D}_1$ la partie de la courbe $\mathscr{D}$ correspondant à $t \in [0, \pi]$.

Montrer que l'on obtient toute la courbe $\mathscr{D}$ à partir de $\mathscr{D}_1$: préciser clairement toutes les transformations géométriques utilisées.

2. **2.1** Exprimer $\sin(2t)$ et $\cos(2t)$ en fonction de $\sin(t)$ et $\cos(t)$.

2.2 Montrer que la courbe $\mathscr{D}_1$ présente deux points singuliers pour $t = 0$ et pour $t = t_0$ que l'on déterminera.

On note I le point de paramètre t_0.

3. Donner l'allure de la courbe au voisinage du point O : on précisera une équation de la tangente en ce point ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

4. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u_0} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$ est un vecteur directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{D}_1$ en I.

Ecrire une équation de $\mathcal{T}$ dans le repère $\mathscr{R}$.

On admet que le point I est un point de rebroussement de première espèce.

5. Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les cercles de centre $\Omega = (3, 0)$ et de rayons respectifs $R_1 = 3$ et $R_2 = 1$.

5.1 Vérifier que la droite $\mathcal{T}$ passe par le point Ω.

5.2 Déterminer $\mathscr{D} \cap \mathscr{C}_1$.

5.3 Soit J le point de $\mathscr{D}$ de paramètre $\dfrac{\pi}{3}$.

Montrer que $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{C}_2$ au point J.

6. Tracer dans $\mathscr{P}$ muni du repère $\mathscr{R}$, les courbes $\mathscr{D}$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathcal{T}$.

7. Montrer que la courbe $\mathscr{D}$ est invariante par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

8. Calculer la longueur de $\mathscr{D}$.

Fin de l'épreuve

EPREUVE DE MATHEMATIQUES B

Durée : 3 heures

PRESENTATION DU SUJET

L'épreuve proposée cette année consistait en trois exercices couvrant une grande partie du programme.

ANALYSE PAR PARTIES

Exercice 1
C'est un exercice classique d'analyse qui utilise les principaux théorèmes du cours de deuxième année.
Quelques questions typiques de cours étaient glissées dans l'exercice.

Globalement, les premières questions étaient bien traitées si ce n'est dans la question 3. la discussion de la résolution de l'équation différentielle où certains cas particuliers étaient oubliés.

Trop peu de candidats justifient de façon claire le passage de F de classe C^1 sur tout intervalle I_a à F de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Nous avons aussi constaté de nombreuses imprécisions dans les raisonnements « déterminer une expression simple de la fonction F demandée à la question 9 ».

Beaucoup de candidats négligent l'exemple proposé à la question 10. ou s'ils abordent la question, s'enlisent dans des calculs pourtant simples.

La question 11. lorsqu'elle est abordée, était en général bien traitée.

Très peu de candidats se sont aventurés dans la question 12. : la notion d'endomorphisme se borne souvent à de la linéarité, en oubliant de vérifier que l'image est encore dans l'ensemble de départ.

Pour étudier l'injectivité d'un endomorphisme, rappelons que l'étude du noyau de cet endomorphisme peut rendre de grands services.

Exercice 2
Il s'agissait d'un exercice classique d'analyse. Les questions, nombreuses et détaillées devaient permettre à la majorité des candidats d'aller au bout de cet exercice.

Nous avons été très surpris que la deuxième question de cet exercice (un calcul de déterminant) soit aussi mal traitée voire sabotée.

Le raisonnement par récurrence proposé à la question 4. n'a pas toujours été rédigé de façon correcte : il est très maladroit de prendre comme hypothèse de récurrence que la propriété à démontre est vraie pour tout entier nature n !

Les questions 5. et 6. ont été traitées par la majorité des candidats avec plus ou moins de bonheur, le manque de rigueur pénalisant certaines copies.

Exercice 3
Il s'agissait d'un exercice de géométrie construit à partir d'une courbe donnée sous forme paramétrique.

La plupart des candidats n'ont pas été plus loin que le tracé de la courbe (pas toujours juste), les questions suivantes n'étant pas ou mal traitées.

Il semble que ces questions (dont une partie sont au programme de première année) aient déstabilisé des candidats mal à l'aise en géométrie, ce que nous déplorons vivement.

CONCLUSION

Rappelons quelques règles élémentaires :

- Tout argument avancé dans une copie doit être prouvé, justifié, démontré. Nous ne prenons pas en compte un résultat juste qui s'surgit tout d'un coup après une suite de calcul (ou d'arguments) faux. Malheureusement, ceci se produit de plus en plus fréquemment.
- Une démonstration se doit d'être écrite proprement en précisant systématiquement quelles sont les hypothèses choisies et quelle est la conclusion à laquelle on arrive : un ingénieur se doit d'être clair dans son raisonnement.
- Il ne faut pas négliger les calculs qui permettent souvent de tester sur des exemples simples les résultats obtenus ou que l'on va démontrer.
- Enfin, rappelons qu'une copie de concours se doit d'être propre, sans trop de ratures, lisible et sans fautes d'orthographe.

e3a

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies.** En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

Ce problème a pour objet l'étude d'endomorphismes sur des espaces vectoriels réels construits à l'aide de formes linéaires.

On rappelle qu'une forme linéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application linéaire définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour tout endomorphisme f d'un espace vectoriel et tout entier $p \geq 1$, on note f^p l'endomorphisme composé $\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ fois}}$.

Les deux premières parties sont consacrées à deux exemples et les deux suivantes à une étude théorique de tels endomorphismes. Les quatre parties de ce problème sont largement indépendantes entre elles.

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique et d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. À tout point M de l'espace de coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$, on associe le vecteur colonne

$$X_M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Tournez la page S.V.P.

Première partie

On considère la matrice $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ainsi que la surface

$$S = \{M \in \mathbb{R}^3 \,/\, {}^tX_M A X_M = 0\}.$$

On notera f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

1. Vérifier qu'une équation de S dans $\mathcal{R}$ est

$$(2\,x - 2\,y - z)\,(x + 2\,y - 2\,z) = 0$$

et en déduire que S est la réunion de deux plans perpendiculaires.

2. On se propose dans cette question de retrouver la nature de S par une autre approche. On considère les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{3}(1, 2, -2), \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2), \quad \vec{e}_3 = \frac{1}{3}(2, -2, -1).$$

(a) Vérifier que $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ puis calculer $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$, $f(\vec{e}_3)$.

(b) En déduire que A est semblable à la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et justifier qu'il existe une matrice orthogonale P, que l'on précisera, telle que $U = P^{-1}AP$.

(c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(d) Soit M un point de l'espace. On note X'_M le vecteur colonne de ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{C})$.

(i) Écrire X_M en fonction de P et X'_M.

(ii) En déduire qu'un point M de coordonnées (x', y', z') dans $\mathcal{R}'$ appartient à S si et seulement si $x'z' = 0$ et retrouver la nature géométrique de S.

3. (a) Déterminer le rang de f et calculer $f \circ f$.

(b) Déterminer une forme linéaire ϕ sur $\mathbb{R}^3$ et un vecteur $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \quad f(\vec{v}) = \phi(\vec{v})\vec{c}.$$

2

Deuxième partie

On considère les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leur premier terme

$$u_0 = -1, \quad v_0 = 2, \quad w_0 = -1$$

et par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -\frac{1}{4}(3u_n - v_n + w_n) \\ v_{n+1} &= -\frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} &= \frac{1}{4}(u_n - v_n - w_n). \end{cases}$$

1. (a) Exprimer $v_{n+1} + 2w_{n+1}$ en fonction de $v_n + 2w_n$ et en déduire que $v_n = -2w_n$ pour tout entier $n \geq 0$.

(b) En déduire que $u_n = -3w_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

(c) En déduire, pour $n \geq 1$, les expressions de w_n, u_n et v_n en fonction de n uniquement puis prouver la convergence de ces trois suites.

2. On se propose dans cette question de retrouver les limites de ces suites par une autre approche.

(a) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle qu'en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on ait

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = MX_n.$$

(b) Justifier l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice inversible P telles que $D = P^{-1}MP$ et préciser D et P.

(c) Retrouver les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) en posant $Y_n = P^{-1}X_n$.

Troisième partie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$; on fixe un vecteur $\vec{a}$ non nul de E ainsi qu'une forme linéaire u sur E qui n'est pas la forme linéaire nulle. On considère enfin l'application f définie sur E par

$$\forall \vec{x} \in E, \quad f(\vec{x}) = u(\vec{x})\vec{a}.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E et préciser son rang.
2. (a) Vérifier que 0 est une valeur propre de f et exprimer son sous-espace propre associé à l'aide de $\operatorname{Ker} u$.

   (b) On suppose que λ est une valeur propre non nulle de f et que $\vec{x}$ est un vecteur propre associé. Montrer que $\vec{x}$ est colinéaire à $\vec{a}$ et que $\lambda = u(\vec{a})$.

   (c) En déduire, en distinguant les cas $u(\vec{a}) = 0$ et $u(\vec{a}) \neq 0$, toutes les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.

   (d) Énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur $u(\vec{a})$ pour que f soit diagonalisable.
3. On adopte un autre point de vue pour étudier la diagonalisation de f.

   (a) Pour tout $\vec{x} \in E$ et tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, démontrer que

$$f^p(\vec{x}) = u(\vec{x})(u(\vec{a}))^{p-1}\vec{a}.$$

   (b) Énoncer précisément la caractérisation des endomorphismes diagonalisables en termes de polynôme annulateur.

   (c) On suppose que $u(\vec{a}) = 0$. Vérifier que $f^2 = O$ (endomorphisme nul) et en déduire que f n'est pas diagonalisable.

   (d) On suppose $u(\vec{a}) \neq 0$. Trouver un polynôme annulateur de f et en déduire que f est diagonalisable.

On considère à présent un endomorphisme g de E de rang 1.

4. Démontrer qu'il existe un vecteur non nul $\vec{b}$ et une forme linéaire v sur E, qui n'est pas la forme linéaire nulle, tels que

$$\forall \vec{x} \in E, \quad g(\vec{x}) = v(\vec{x})\vec{b}.$$

5. On suppose que $g^2 \neq O$ (endomorphisme nul). Montrer que g est diagonalisable et qu'il existe un réel $\alpha \neq 0$ et une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle g a pour matrice la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & 0 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}.$$

6. On suppose que $g^2 = 0$ et on considère un vecteur $\vec{e}_n$ tel que $g(\vec{e}_n) \neq 0$.

   (a) Énoncer le théorème de la base incomplète.

(b) Justifier l'existence de vecteurs $\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$ tels que $(g(\vec{e}_n), \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1})$ soit une base de $\operatorname{Ker} g$.

(c) En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle g a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Déduire des questions **5** et **6** que deux matrices carrées de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

Quatrième partie

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension infinie ou de dimension finie $n \geq 2$. On fixe un vecteur $\vec{a}$ non nul de E ainsi qu'une forme linéaire u sur E. On considère l'application h définie sur E par

$$\forall \vec{x} \in E, \quad h(\vec{x}) = u(\vec{a})\vec{x} - u(\vec{x})\vec{a}$$

et on supposera $u(\vec{a}) \neq 0$.

1. Démontrer que $\operatorname{Ker} h$ est la droite vectorielle dirigée par $\vec{a}$ puis démontrer que $\operatorname{Im} h = \operatorname{Ker} u$.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de h. On suppose, dans cette question seulement, que E est de dimension finie $n \geq 2$; l'endomorphisme h est-il diagonalisable ?

3. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $\vec{x} \in E$,

$$h^p(\vec{x}) = (u(\vec{a}))^{p-1} h(\vec{x}).$$

4. L'espace vectoriel E est muni d'une norme $\| \ \|$ et l'on suppose que $|u(\vec{a})| < 1$. Montrer que

$$\left\| h^p(\vec{x}) \right\| \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. *Applications.*

(a) Soit f une fonction définie et continue sur $[0, \pi]$, à valeurs réelles. On considère la suite de fonctions $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie par $f_0 = f$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ par

$$\forall t \in [0, \pi], \quad f_{p+1}(t) = \frac{2}{3} f_p(t) - \sin 3t \int_0^{\pi} f_p(s) ds.$$

Démontrer que pour tout $t \in [0, \pi]$, $f_p(t) \to 0$ lorsque $p \to +\infty$.

(b) En considérant le vecteur $\vec{a} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ et et la forme linéaire $h : (x, y, z) \mapsto x - y + z$, retrouver les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) de la partie II.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES A

Durée : 4 heures

PRESENTATION DU SUJET

Le sujet de l'épreuve de mathématiques A du concours E3a filière PC de la session 2012 était centré sur l'algèbre linéaire et traitait principalement d'endomorphismes construits autour de formes linéaires. Les deux premières parties étaient consacrées à deux exemples, respectivement en géométrie et dans le domaine des suites récurrentes, et les deux suivantes étaient consacrées à une étude théorique de tels endomorphismes.

Le sujet embrassait une très grande partie du programme d'algèbre linéaire des classes de PCSI et PC: représentation matricielle, noyau, image, éléments propres, réduction, matrices semblables, matrices orthogonales et comportait quelques questions de géométrie analytique élémentaire et de comportement de suites et de suites de fonctions. Il était conforme au programme des classes de PCSI et PC.

COMMENTAIRES SUR LE SUJET

Le sujet était d'une longueur tout à fait raisonnable et comportait peu de questions difficiles, ces dernières étant placées en fin des parties III et IV et peu calculatoires.

Dans l'ensemble, les questions étaient assez proches du cours d'algèbre linéaire.

Le jury n'a pu que déplorer de graves lacunes en algèbre linéaire et en géométrie élémentaire chez de nombreux candidats. La notion de rang a souvent été malmenée; la condition de diagonalisation en termes de polynôme annulateur et le théorème de la base incomplète également. Les équations de plans, les vecteurs normaux à un plan et l'orthogonalité ont donné lieu à de nombreuses confusions.

Des imprécisions de langage, comme "le" vecteur normal à un plan, "le" vecteur propre associé à une valeur propre, "le" polynôme annulateur, révélaient une connaissance très approximative du cours.
Enfin, de graves fautes de logique sont venues malheureusement entacher une part non négligeable de copies: une matrice semblable à une matrice non diagonale n'est pas obligatoirement non diagonalisable, un endomorphisme dont on a exhibé un polynôme annulateur non scindé peut être diagonalisable.

ANALYSE PAR PARTIES

Première partie

On étudiait une surface, qui s'avérait être la réunion de deux plans, de deux points de vue: l'un direct par transformation de son équation et l'autre par l'intermédiaire de la réduction d'une matrice dans une base orthonormée.

Question 1. Des confusions autour de la notion de réunion et d'intersection et celle d'équation de plan; de nombreux candidats ont affirmé que les plans étaient perpendiculaires du fait que le produit de leur équation donnait 0.
Question 2.
(a) Beaucoup de candidats ignorent qu'une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

(b) Les formules de changement de base sont bien connues pour les matrices mais très peu sues pour les vecteurs et l'orthogonalité d'une matrice de passage doit se justifier.
(c) Des difficultés pour prouver qu'une matrice ne possédant que la valeur propre 0 est non diagonalisable.
(d) Cette question sur la réduction de l'équation de la surface par changement de base a été mal comprise; le jury a constaté une absence totale de sens critique chez des candidats qui trouvaient une nature géométrique différente (ellipsoïde, droites, hyperboloïde ...) de celle trouvée à la question 1.
Question 3.
(a) Beaucoup de maladresses, comme fof = A^2.
(b) Question très peu traitée; certains ont astucieusement utilisé la base réduisant l'endomorphisme.

Deuxième partie
Il était question de suites définies par des relations de récurrence linéaires. Comme dans la première partie, on proposait une étude "directe" et une étude basée sur la réduction d'une matrice.

Question 1.
(a) Des récurrences laborieuses et inutiles au lieu de reconnaître une suite géométrique.
(c) De très nombreuses erreurs dues à la non prise en compte des relations à partir du rang 1 seulement. Des imprécisions concernant la convergence d'une série géométrique "de raison inférieure à 1".
Question 2.
(b) Beaucoup d'erreurs en raison du coefficient 1/4 devant la matrice, mal géré ensuite dans le calcul du polynôme caractéristique. Les candidats trouvant le vecteur nul comme seul vecteur propre ou proposant une matrice de passage comportant une colonne de zéros se doivent obligatoirement de réagir, ce que certains ont heureusement fait.
(c) Question extrêmement classique le plus souvent mal comprise.

Troisième partie
On étudiait dans cette partie un endomorphisme de rang 1, en particulier du point de vue de sa diagonalisation.

Question 1. La question relative au rang est rarement bien traitée.
Question 2. Des confusions autour de la notion de valeur propre: un scalaire l est valeur propre si f(x) = lx pour tout x, f(0)=0 donc 0 est valeur propre. Des divisions par des vecteurs ont été lourdement sanctionnées. La question de synthèse (c) a souvent été traitée de manière confuse.
Question 3.
(a) Bien traitée en général, mis à part quelques copies où des produits de vecteurs apparaissent.
(b) Cette question de cours a souvent été mal traitée, une des hypothèses étant souvent omise.
(c) Globalement correct.
Question 4. Des raisonnements "par analogie", c'est à dire pas de raisonnement du tout ou des raisonnements en prenant pour hypothèse la conclusion à laquelle il faut parvenir. Néanmoins, beaucoup de candidats avaient bien compris l'idée.
Question 5. A nouveau une question de synthèse assez mal rédigée.
Question 6.
(a) Réponses souvent approximatives du genre "toute base se complète en une base".
(b) Très mal argumenté: l'argument principal, à savoir g(e_n) appartient au noyau, est souvent omis.

(c) La base est souvent citée, mais la preuve rigoureuse fait défaut.
Question 7. Question de synthèse rarement abordée.

Quatrième partie
Dans cette partie, une autre catégorie d'endomorphismes était étudiée et l'épreuve s'achevait par une application aux suites de fonctions et aux suites récurrentes.

Question 1. La plupart des candidats vérifient seulement l'inclusion de Ker(h) dans Vect(a). En revanche, la double inclusion a été très majoritairement abordée et le plus souvent avec succès dans la preuve de l'égalité Im(h)=Ker(u).
Question 2. Cette question nécessitant de faire preuve de synthèse a été traitée le plus souvent de manière confuse.
Questions 3 et 4. Ces questions ont été plébiscitées!
Questions 5 et 6. Ces questions ont rarement été abordées et très bien faites dans quelques copies.

ANALYSE DES RESULTATS

Ce problème a classé de manière satisfaisante les candidats. On a relevé une copie d'une exceptionnelle qualité et relativement peu de copies très faibles.
Compte-tenu du barème, un candidat ayant traité la première et la moitié de la deuxième partie pouvait atteindre la moyenne. On ne saurait trop recommander aux candidats de chercher à s'investir complètement dans une ou deux parties plutôt que de chercher à glaner des points ici ou là.

CONSEILS AUX CANDIDATS

Le concours E3A n'a pas pour vocation de recruter des mathématiciens mais plutôt des étudiants dotés d'un esprit critique et logique, capables de restituer leur connaissance du cours et d'exprimer clairement leurs idées. Aussi, il leur est recommandé:

- de poursuivre leurs efforts de présentation, de précision et de concision dans la rédaction,
- de bien connaître son cours, définitions et théorèmes, car des questions de cours seront de plus en plus fréquentes et valorisées dans les problèmes,
- de faire preuve d'esprit critique en se relisant, de construire leurs réponses dans un ordre logique
- et enfin il leur est conseillé de prendre le temps de lire complètement l'énoncé d'une partie avant de l'entamer, afin de bien s'imprégner du thème et de la problématique abordés.

e3a

11PC07

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

EXERCICE 1

On considère ici l'espace vectoriel réel $E = M_4(\mathbb{R})$ muni de ses lois usuelles, et qui est aussi muni du produit matriciel noté $\times$.

On notera $G = GL_4(\mathbb{R}) = \{M \in E \quad / \quad det(M) \neq 0\}$ le groupe (pour $\times$) des matrices de E inversibles.

Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on notera $diag(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$ (matrice diagonale de E), $\mathbf{O} = diag(0,0,0,0)$ la matrice nulle, et $\mathbf{I} = diag(1,1,1,1)$ la matrice unité.

On s'intéresse ici à certains sous-espaces vectoriels de E stables pour $\times$.

$\boxed{\textbf{1)}}$ Soit $K \in E$, dont tous les coefficients valent 1.

(i) Calculer K^2 et déterminer un polynôme réel P de degré 2 annulateur de K: tel que $P(K) = \mathbf{O}$. Quelles sont les valeurs propres de K ?

(ii) Soit $M = x\mathbf{I} + yK$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que M est diagonalisable, préciser les valeurs propres de M, et donner une matrice diagonale semblable à M.

(iii) Démontrer que $F = \{x\mathbf{I} + yK/(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de E et déterminer sa dimension. Vérifier que F est stable pour $\times$: si $M, N \in F$, alors $M \times N \in F$.

(iv) Soit $M = x\mathbf{I} + yK$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer à quelle condition M est inversible, et exprimer alors M^{-1} (en fonction de $x, y, \mathbf{I}, K$).

$\boxed{\textbf{2)}}$ Soient $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et:

$$H = Vect(K, Z) = \{aK + bZ \quad / \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

(i) Démontrer que les quatre matrices $K^2, Z \times K, K \times Z, Z^2$ sont dans H. En déduire que H est stable pour le produit matriciel $\times$.

(ii) Déterminer les sous-espaces propres pour K et Z.

(iii) En déduire une matrice $Q \in G$, vérifiant les trois conditions:

- La valeur absolue de tous les coefficients de Q vaut $\frac{1}{2}$,
- •• ${}^tQ \times Q = \mathbf{I}$,
- ••• $K' = Q^{-1} \times K \times Q$ et $Z' = Q^{-1} \times Z \times Q$ sont toutes les deux diagonales.

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, que vaut alors: $\quad {}^tQ \times \begin{pmatrix} a+b & a & a-b & a \\ a & a+b & a & a-b \\ a-b & a & a+b & a \\ a & a-b & a & a+b \end{pmatrix} \times Q$?

$\boxed{\textbf{3)}}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Calculer A^2 et A^3. La famille (A, A^2, A^3) est-elle libre ?

(ii) Quel est le rang de A ? A est-elle semblable à $J = diag(1, 1, 0, 0)$?

(iii) Déterminer un polynome réel R de degré 3, annulateur de A, tel que $R(A) = \mathbf{O}$. Préciser les valeurs propres de A.

(iv) Justifier que A est diagonalisable, et montrer l'existence de trois matrices U, V, W et de deux réels a et b tels que: $A = aU + bV$, avec:

$$U + V + W = I,\ U^2 = U, V^2 = V, W^2 = W,$$

$$\text{et} \qquad U \times V = V \times U = U \times W = W \times U = V \times W = W \times V = \mathbf{O}.$$

A est-elle semblable alors à $\Delta = diag(a, b, 0, 0)$?

(v) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en fonction de A et A^2.

(vi) Démontrer que $C = \{M \in E \quad / \quad A \times M = M \times A\}$ est un sous-espace vectoriel de E, et calculer sa dimension.

(vii) Étudier s'il peut exister M dans E, telle que $M^2 = A$.

EXERCICE 2

$\boxed{\textbf{1)}}$ (i) Montrer l'existence de $a = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et de $b = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$, et établir une relation entre a et b.

(ii) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,dt$.

Démontrer que F est ainsi définie sur $\mathbb{R}_+$, et continue sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $F(0)$.

(iii) Démontrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et vérifier que:

$$\forall x > 0, \qquad e^{-x}\left(F'(x) - F(x)\right) = -a\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

(iv) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$; pour cela, on pourra d'abord établir une majoration de $F(x)$ pour $x > 0$ en fonction de x et a.

(v) En déduire, pour $x \geq 0$, une expression de $F(x)$ grâce à $J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$, puis les valeurs de a et b.

$\boxed{\textbf{2)}}$ (i) Soit $G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Justifier que G est ainsi définie sur $\mathbb{R}$, est impaire, et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(ii) Déterminer le développement en série entière sur $\mathbb{R}$ de G'. En déduire que G est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, en précisant ce développement ainsi que le rayon de convergence.

(iii) Soit $H(x) = e^{x^2}G(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que H est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et écrire ce développement sous la forme : $H(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k x^{2k+1}$, en exprimant u_k sous forme d'une somme.

(iv) Déterminer une équation différentielle du premier ordre dont H est solution sur $\mathbb{R}$. En déduire une relation de récurrence entre u_{k+1} et u_k, puis la valeur de u_k pour $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\textbf{3)}}$ (i) Soit $\qquad \Phi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt, \qquad$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Démontrer que Φ est bien définie, et relier Φ avec G de la question **2)**. Démontrer que Φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; préciser la valeur de $\Phi'(x)$ pour tout réel x.

(ii) Préciser $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0$, et grâce au calcul de a en **1)**, $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x)$.

(iii) Démontrer l'existence d'un polynôme réel P et d'une constante réelle C, que l'on explicitera, tels que:

$$\forall x > 0, \qquad \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = e^{-x^2}P\left(\frac{1}{x}\right) + C\int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u\sqrt{u}}\,du.$$

(iv) En déduire un équivalent simple de $\Phi(x)$ quand $x \to +\infty$, puis que Φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(v) Au moyen d'une intégration par parties, calculer l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \Phi(x)\,dx$.

EXERCICE 3

$\boxed{1)}$ On se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ étant orthonormale.

(i) Préciser la nature de la conique $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 = 2y\}$, et préciser son ou ses foyers, sa ou ses directrices.

Rappeler alors comment on peut définir cette conique grâce à son ou ses foyers, et grâce à sa ou ses directrices.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$, et $M_x = (x, \frac{x^2}{2})$. Déterminer une équation dans la base $\mathcal{B}$ de la tangente $\mathcal{T}_x$ à $\mathcal{P}$ en M_x ; préciser un vecteur dirigeant cette droite $\mathcal{T}_x$. Déterminer (par une équation) la droite $\mathcal{N}_x$ passant par M_x et perpendiculaire à $\mathcal{T}_x$.

(iii) Soit $x \in \mathbb{R}$, et la droite $D_x = \{(x, t), t \in \mathbb{R}\}$. Déterminer la droite Δ_x obtenue par symétrie orthogonale de D_x par rapport à $\mathcal{N}_x$, et déterminer le point d'intersection de Δ_x avec $\delta = \{(0, u), u \in \mathbb{R}\}$ (axe Oy). Comment interprétez-vous ce résultat ?

$\boxed{2)}$ On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{C} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ étant orthonormale.

(i) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R_\theta : (x, y, z) \mapsto (\cos(\theta)x + \sin(\theta)z, y, -\sin(\theta)x + \cos(\theta)z)$. Justifier que R_θ est une rotation de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$, et $M_x = (x, \frac{x^2}{2}, 0)$. Déterminer la nature de $\Gamma_x = \{R_\theta(M_x), \theta \in [0, 2\pi]\}$, ainsi que des équations dans la base $\mathcal{C}$ de Γ_x.

(iii) Déterminer une équation dans la base $\mathcal{C}$ de la surface $S = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \Gamma_x$. Que peut-on dire de cette surface ?

(iv) Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, z) \mapsto (x, \frac{x^2 + z^2}{2}, z)$, et la surface: $\Sigma = F(\mathbb{R}^2)$.

Soit $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (r, \theta) \mapsto (r \sin(\theta), \frac{r^2}{2}, r \cos(\theta))$, et la surface: $\Phi = G(\mathbb{R}^2)$. Comparer (par des inclusions ou des égalités) les trois surfaces S, Σ, Φ.

(v) Soit $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé, et $A_0 = F(x_0, z_0)$. Déterminer une équation dans la base $\mathcal{C}$ du plan tangent à Σ en A_0.

Déterminer A_0 tel que ce plan tangent soit de la forme: $P_c = \{(X, c, Z), (X, Z) \in \mathbb{R}^2\}$ (où c est une constante réelle).

$\boxed{3)}$ Toujours dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ on considère les deux courbes:

$$C_1 = \{(x, \frac{x^2}{2}, 0), \quad x \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad C_2 = \{(0, y, \frac{y^2}{2}), \quad y \in \mathbb{R}\}.$$

et soit: $\Delta = \{(0, u, 0), u \in \mathbb{R}\}$ (axe Oy), et $O = (0, 0, 0)$.

(i) Soit $P = (x, \frac{x^2}{2}, 0)$ sur C_1, $x \neq 0$. Déterminer le point A_1 d'intersection entre Δ et la tangente à C_1 au point P.

(ii) Soit $Q = (0, y, \frac{y^2}{2})$ sur C_2, $y \neq 0$. Déterminer le point A_2 d'intersection entre Δ et la tangente à C_2 au point Q. A quelle condition a-t'on $A_1 = A_2$?

(iii) Soit σ la réunion des droites (dites "génératrices") (PQ) où $P \in C_1$ et $Q \in C_2$ avec $P \neq Q$, et tels que la tangente à C_1 au point P, et la tangente à C_2 au point Q, se coupent sur Δ. Déterminer une représentation paramétrique de σ grâce à une fonction H (définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$).

(iv) Démontrer que les plans tangents à σ en tous les points de σ qui appartiennent à une même droite génératrice (PQ) donnée, sont tous parallèles.

FIN DE L'EPREUVE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES B

Durée : 3 heures

PRESENTATION DU SUJET

L'épreuve était constituée de trois exercices indépendants : algèbre linéaire, analyse, géométrie. La grande variété de questions devait permettre à chacun de montrer ses capacités, même si la longueur relative rendait difficile de pouvoir traiter la totalité. Une grande diversité dans les copies, peu de très bonnes copies, et fréquemment une relative lenteur ou maladresse, et les références aux résultats du cours manquent souvent. Confirmation du manque d'aisance en algèbre, et plus surprenant de faiblesses inhabituelles dans les techniques de base de l'analyse. La géométrie restant le parent pauvre.

Passons maintenant aux détails des exercices :

L'exercice 1 abordé par tous les candidats utilisait des calculs matriciels élémentaires. Il était souvent possible de limiter les calculs à effectuer, mais ce ne fut que rarement le cas pour les candidats qui s'y perdent. La dernière question sur la réduction, un peu plus subtile, fut peu traitée.

1) Le polynôme annulateur n'est pas trouvé dans les copies faibles. La vérification du fait que 0 et 4 sont valeurs propres est souvent omise. Les candidats ont fait beaucoup de calculs avec les polynômes caractéristiques (parfois inexacts) mais certains utilisent à bon escient le rang et la trace de K, ou utilisent la diagonalisation de K pour en déduire correctement celle de M. Pour d'autres candidats, la diagonabilité de M est “évidente” comme combinaison linéaire de deux matrices diagonalisables. Le fait que toutes les matrices étudiées symétriques réelles et donc diagonalisables trop peu mis en évidence. L'usage des polynômes annulateurs manqué d'aisance ou donne lieu à des confusions.
La dimension de F est souvent omise ou parfois farfelue (4, 16,...) sans argumentation. On confond souvent la dimension de F, le rang ou l'ordre des matrices qui composent F. (iv) est rarement fait, et Q reste un mystère pour beaucoup de candidats;

2) La déduction de H stable pour le produit matriciel n'est pas argumentée dans de nombreuses copies! La détermination des sous-espaces propres n'est pas abordée dans les copies les plus faibles, ou alors n'aboutissent pas. (iii) est rarement correctement abordé

3) Certains candidats trouvent $A^2 = 2A$ et retrouvent ainsi la relation A^3 = 4A. Le rang de A est souvent affirmé (3 ou 4 en général), par contre l'argument de la trace est régulièrement proposé pour répondre à la question entre A et J.

L'exercice 2, sur l'intégrale de Gauss, a été inégalement abordé. Les techniques d'étude des intégrales ne sont pas toujours maitrisées. En grand nombre on confond souvent étude de primitives et intégrales à paramètres. La question 2 sur les séries entières a aussi montré des faiblesses et n'est correctement traitée que dans les meilleures copies.

1) La première question est très décevante. Que d'erreurs ou d'insuffisances pour justifier l'existence des intégrales! On trouve toujours des arguments notoirement inexacts en général : on relie l'intégrabilité sur R+ au fait que la fonction est juste continue, ou encore tend vers 0 à l'infini ; d'autres sont évidemment capables de donner une primitive de exp(-t^2). Le changement de variable est rarement justifié et reste très formel.

Les théorèmes de continuité et dérivabilité sont très souvent bien énoncés, mais les hypothèses de domination ne sont pas toujours bien justifiées. On majore souvent avec (t^2) / (1+t^2) “intégrable sur R+”. Très peu de candidats ont su trouver ou simplement amorcer les relations entre F est J.

2) On justifie souvent la définition de G par l'intégrabilité de exp(-t^2) sur IR et la parité est rarement expliquée. Beaucoup de candidats comment étudier G en tant que primitive, et non pas comme une intégrale à paramètre, et sa dérivée est souvent fausse. Les séries entières aussi posent des difficultés à beaucoup de candidats pour qui, il est évident que cette partie du cours est ignorée. Les développements en série entière de G et G' sont souvent donnés, mais non justifié pour celui de G, la valeur de G(0) n'intervenant que très rarement.

Les étudiants faisant références explicitement à un produit de Cauchy étant rares, même si techniquement ces derniers réussissaient à obtenir le développement en série entière cherché; Quelques candidats ont su identifier les coefficients du développement en série entière de H.

La fin du 2) n’a été réussie que par quelques candidats

3) Les derniers points de 2) et 3) sont rarement abordés ou donnent lieu à un survol superficiel et qui ne rapporte rien. Ils ne sont réellement traités que dans les meilleures copies, et on trouve alors souvent un calcul correct en 3) (v) de l’intégrale.

L’exercice 3 de géométrie fut très décevant. Cela commençait par une étude très « classique » de la parabole qui a révélée des faiblesses anormales.

1) "P est une Parabole" est souvent la seule réponse donnée pour cet exercice Son foyer et sa directrice sont souvent faux. La recherche d’une tangente ou d’une normale semble totalement inaccessible à beaucoup de ceux qui abordent la question.

2) Pour justifier la rotation, le calcul du déterminant parait suffisant, ou l’on dit simplement que l’"on reconnaît une matrice de rotation” et on s'arrête là ;
Quelques rares candidats se sont intéressés à la nature de Γx : sans justification. La reconnaissance d’un cercle, puis du parboloïde de révolution obtenu n’apparaît que dans les meilleures copies. La fin de l’exercice n’est quasiment jamais abordée.

En conclusion, cette épreuve, notée avec un barème approprié a permis un étalement convenable des notes des candidats, et permis à ceux qui sont capables de mettre en œuvre leur savoir-faire en mathématiques d’être récompensé de leur préparation. Nous ne pouvons conseiller aux futurs candidats de préparer avec méthode et approfondissement les concours, et de bien veiller à mettre en évidence lors des épreuves leur capacité à savoir traiter correctement et avec précision et efficacité les questions proposées, qualités toutes nécessaires à un futur ingénieur.

e3a

11PC06

Concours ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A PC

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Problème.

- La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, <u>l'énoncé exact des théorèmes de cours utilisés</u> entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
- Les quatre parties sont très largement indépendantes.
- Dans tout le problème :

  * f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

  * F désigne l'unique primitive de f qui s'annule en 0 donc $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

  * $\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

  * pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

Partie I : Résultats préliminaires.

1) Etude de f :

   a) Etudier la fonction f puis tracer sa courbe représentative $\left(C_f\right)$.

   b) $\left(C_f\right)$ possède-t-elle des points d'inflexion ? Si oui, les déterminer.

   c) Donner le développement limité à l'ordre 8 en 0 de f.

   d) Donner les valeurs de $f^{(k)}(0)$ pour $k\in\{1,\dots,8\}$. Enoncer avec soin le ou les théorème(s) utilisé(s).

2) Etude de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

   a) Etudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   b) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une suite convergente ?

   c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$.

   d) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$?

3) Etude d'une intégrale impropre :

   a) Justifier l'existence de F . Enoncer avec précision le théorème utilisé.

   b) Justifier l'existence de α .

   c) Montrer que $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ (justifier avec soin).

   d) En déduire que $\alpha = 2F(1)$.

   e) i) Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge.

   ii) Montrer que $\alpha \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leq \alpha + 1$.

Partie II : Intégrales de Wallis.

Dans cette partie si $n\in\mathbb{N}$, I_n désigne l'intégrale suivante : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\, dt$.

1) Calculer I_0 et I_1 .

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\, dt$.

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n > 0$.

4) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente.

5) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ (utiliser une intégration par parties).

6) Montrer que la suite $\left((n+1)I_{n+1}I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante (donner sa valeur).

7) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{2n} = \frac{\pi}{2}a_n$ et $I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)a_n}$.

8) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq 2$, $1\leq \frac{I_{n-1}}{I_n}\leq \frac{I_{n-2}}{I_n}$.

   b) Calculer la limite des suites de terme général : $\frac{I_{n-2}}{I_n}$, $\frac{I_{n-1}}{I_n}$ et nI_n^2.

   c) Donner un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

9) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq a_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$.

b) En déduire que le terme a_n est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

c) Donner la nature des séries de terme général :

i) a_n ii) $\dfrac{a_n}{4n+1}$ iii) $(-1)^n a_n$ iv) $\dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$

Partie III : Etude de F.

On note (C) la courbe représentative de F dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ orthonormé du plan.

1) Etude globale de F :
   a) Montrer que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   b) Donner le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.
   c) Montrer que F est impaire.
   d) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $F(x) - F\left(1\right) \leq 1 - \dfrac{1}{x}$.
   e) Enoncer le théorème concernant l'existence de la limite en $+\infty$ d'une fonction croissante définie sur $[A, +\infty[$ (où $A \in \mathbb{R}$).
   f) Déduire des 2 questions précédentes que F a une limite finie en $+\infty$.

2) Etude locale de F :
   a) Donner le développement limité de F en 0 à l'ordre 9. Enoncer le théorème utilisé.
   b) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 et préciser la position de (C) par rapport à T au voisinage de 0.
   c) La courbe (C) possède-t-elle des points d'inflexion ? Si oui, les déterminer.

3) Lien avec α :
   a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) - F(1) = F(1) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   b) En déduire que la limite de F en $+\infty$ est égale à $2F(1)$.
   c) En utilisant la partie I)3), montrer que la limite de F en $+\infty$ est α et retrouver le résultat de III)3)b).

4) Tracé de (C) :
   a) Dresser le tableau de variations de F.
   b) Donner une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.
   c) Tracer (C) en tenant compte des différents points de l'étude précédente. Pour le tracé, prendre $\alpha \approx 1.85$.

5) Quelques applications de F :
   a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $(1+t^4)y' + 2t^3 y = 1$.
   b) On considère la courbe paramétrée : $(\Gamma)\ \begin{cases} x(t) = F(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{t} \end{cases}$.
      i) Montrer que l'étude de (Γ) peut être restreinte à $]0, +\infty[$. Préciser alors les symétries de (Γ).
      ii) Dresser le tableau de variations de (Γ).
      iii) Déterminer de manière précise le comportement de (Γ) quand t tend vers $+\infty$.
      iv) Tracer la courbe (Γ).

c) On considère la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2 F(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{cases}$.

i) Montrer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les trois inégalités suivantes :

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \qquad 0 \leq f(xy) \leq 1 \qquad |F(xy)| \leq |xy|$$

ii) Justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

iii) Calculer pour $(x,y) \neq (0,0)$: $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)$.

iv) φ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Partie IV : Développement en série entière de F et utilisation.

On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$, on note $h(x)$ sa somme.

On rappelle le résultat de la question II)9)b) : a_n est équivalent à $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$.

1) Etude de h :
   a) Donner le rayon de convergence de la série entière définissant h.
   b) Montrer que $h(1)$ et $h(-1)$ existent.
   c) Enoncer le théorème de continuité de la somme d'une série entière de rayon R>0 sur le segment [0,R] et en déduire que h est continue sur [-1,1].
   d) i) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1} x^{4n+1}$ est normalement convergente sur [-1,1].
   ii) Retrouver le résultat de IV)1)c). Enoncer le théorème utilisé.

2) Développement en série entière de F :
   a) Rappeler, si $\beta \in \mathbb{R}$, le développement en série entière de la fonction b définie par $b(x) = (1+x)^\beta$. Sur quel intervalle ce développement est-il valable ?
   b) En déduire que f puis F sont développables en série entière au voisinage de 0 et préciser leur développement en série entière.
   c) Montrer que pour tout $x \in$[-1,1] : $F(x) = h(x)$ (on pourra utiliser IV)1)c)).
   d) En déduire que $\alpha = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.

3) Valeur approchée de α :
   Dans cette question, si $p \in \mathbb{N}$, S_p désigne la p^ième^ somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ soit $S_p = \sum_{n=0}^{p} \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.
   a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|\alpha - 2S_p| \leq \dfrac{2}{4p+5} a_{p+1}$.
   b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|\alpha - 2S_p| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \dfrac{1}{(p+1)^{3/2}}$ (utiliser II)9)a)).
   c) En déduire un entier p tel que $2S_p$ soit une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES A

Durée : 4 heures

PRESENTATION DU SUJET

Le sujet avait pour thème central l'étude de F la primitive qui s'annule en 0 de la fonction, la première partie installait quelques propriétés, la seconde très classique était consacrée aux intégrales de Wallis, la troisième à l'étude de F et la quatrième à son développement en série entière.

Le sujet était conforme aux programmes des classes PCSI-PC adapté à une épreuve de 4 heures et au niveau des candidats.
Le sujet balayait une grande partie du programme d'analyse des classes du secondaire, de PCSI et de PC.

COMMENTAIRES GENERAUX

La correction de cette épreuve, a mis en évidence le manque de rigueur de nombreux candidats sur la vérification des hypothèses des théorèmes utilisés. On attend du candidat qu'il cite avec précision le théorème qu'il va utiliser (de nombreuses questions demandaient explicitement l'énoncé d'un théorème), ensuite qu'il en vérifie les hypothèses (c'est une étape très souvent oubliée ou bâclée) et enfin qu'il conclut.
Au niveau du barème par question, ces 3 étapes sont systématiquement notées.
Quelques exemples concrets, sur la première partie de cette épreuve, de questions très mal rédigées par les candidats :

> Question I)1)d) : l'énoncé du théorème de Taylor Young et l'unicité de la partie régulière d'un développement limité sont attendus, ensuite il faut vérifier que la fonction est bien de classe C^n au voisinage de 0 (hypothèse du programme) et seulement à la fin, le candidat identifie et obtient les différentes dérivées demandées.
> Question I)3)a) : Le théorème sur l'existence et l'unicité d'un primitive pour une fonction continue sur un intervalle I avec une condition initiale est attendu avec la simple vérification de la continuité sur cet intervalle.
> Question I)3)c) : Le théorème sur les changements de variables dans une intégrale impropre est attendu avec la vérification de l'hypothèse C^1 difféomorphisme de I sur J.

Un autre point important est la mise en évidence de grosses lacunes mathématiques sur le programme du secondaire : inégalités, déterminer une équation de tangente, tracer un graphe précis et soigné, calculer une dérivée et manipuler des expressions mathématiques.
Peut-être est-ce dû à la diminution significative des heures de maths dans le secondaire ?

Le sujet étant classique et sans réelles difficultés, le niveau des copies était dans l'ensemble convenable. L'épreuve a été traitée par 3020 candidats. Les notes s'étalent entre 0 et 20, avec une moyenne de 9,69 et un écart-type de 4,21.
De nombreux candidats ont traité l'ensemble du problème ou en tout cas ont eu le temps d'aborder la plupart des questions.
La plupart des candidats ont fait un réel effort de présentation (très peu de copies illisibles ou brouillons) ce qu'il faut évidemment encourager. Il est à regretter toutefois que de nombreuses copies manquent parfois de justifications claires ou concises!

ANALYSE PAR PARTIE :

Partie I :
a) Question dans l'ensemble plutôt bien traitée.
Quelques étudiants dessinent une tangente verticale et un point de rebroussement de première espèce en 0 sans aucune cohérence avec leur étude !
b) Question très mal traitée.
- Ignorance de la notion de point d'inflexion même si parfois les candidats visualisent sur le graphe ces points d'inflexion.
- Confusion fréquente entre annulation de f' et f'', erreurs de calculs dans f'', le changement de signe de f'' n'est pratiquement jamais évoqué !
c) Plus de 50% des candidats ont un développement limité faux ! Dans quelques cas oubli du reste ou un DL à un ordre beaucoup plus élevé que 8.
d) La formule de Taylor Young à l'ordre 8 est appliquée sans vérifier l'hypothèse de classe $\cdot^8$ au voisinage de 0, l'unicité de la partie régulière du développement est presque toujours oubliée.
Quelques candidats oublient les factoriels dans leur identification, d'autres essayent de dériver successivement le développement limité voire la fonction !
a) Très rares sont les candidats qui évoquent le fait que a_n est strictement positive avant d'étudier la position de par rapport à 1.
De nombreuses erreurs dans la simplification de, rappelons à ce propos pour certains que (2n)! ne vaut pas 2(n!).
b) Le théorème de limite monotone pour les suites est en général bien cité.
Quelques candidats utilisent correctement la formule de Stirling pour avoir un équivalent puis la limite de la suite.
Quelques autres confondent suites et séries et essayent d'utiliser un critère de d'Alembert bien fantaisiste !
c) Question dans l'ensemble bien traitée.
d) Moins de 25% des candidats rédigent correctement cette question pourtant très simple !
Il n'existe pas dans le programme de PC de théorème de d'Alembert sur les séries entières, il faut donc utiliser le théorème sur les séries numériques et discuter de la limite de et de son positionnement par rapport à 1.
En vrac le z est très souvent oublié, les modules également voir parfois la limite, la discussion finale qui amène à déterminer R est très rarement faite.
Au gré des corrections ce rayon varie de 0 à l'infini en passant par ¼ et parfois il est négatif ou dépend de n (preuve que pour certains candidats cela reste bien abstrait !).
a) Question très facile mais fort mal traitée par les candidats, il y a confusion avec la question suivante et parfois les candidats écrivent exactement la même chose pour les 2 questions.
Le fait qu'une fonction continue sur un intervalle possède une infinité de primitives et une seule si on fixe « une condition initiale » échappe à la plupart des candidats.
b) La positivité n'est pas souvent citée dans le critère d'équivalence.
Une intégrale généralisée n'est pas systématiquement doublement impropre.
Il existe encore quelques candidats qui pensent qu'il suffit que la fonction tende vers 0 en l'infini pour que son intégrale converge.
c) De nombreux candidats ne traitent pas la question car ils n'ont pas trouvé le changement de variables.
Ici la justification valait plus de points que le calcul : le théorème de changement de variables dans les intégrales impropres est rarement bien cité.
d) Question dans l'ensemble bien traitée.
e) i) Cette question est en général mieux traitée que la question c) que ce soit par comparaison série intégrale ou par comparaison à une série de Riemann.
Les remarques faites en c) restent valables.

Signalons tout de même quelques candidats qui parlent de convergence simple et normale pour une série numérique !
ii) Près de la moitié des copies pensent à utiliser une comparaison série-intégrales, certains la font très bien.

Partie II :
Question bien traitée.
Rares sont les candidats qui font d'office le bon changement de variables, certains aboutissent en faisant 2 voir 3 changements de variables consécutifs.
Certains se contentent d'une figure pour n=1, d'autres essayent en vain une récurrence ou sont bloqués par les relations de trigonométrie.
Certains aboutissent dans un raisonnement par récurrence en vérifiant que les 2 intégrales vérifient la même relation de récurrence sur 2 termes (demandée en 5).
Quelques candidats intègrent $\cos^n$ en !

La très grande majorité des candidats ne distingue pas la positivité et la non nullité.
Pour la positivité, dans le théorème de positivité de l'intégrale il faut signaler que les bornes sont dans le « bon ordre » ce qui n'est presque jamais dit.
La stricte positivité n'a pratiquement jamais été correctement justifiée.
Question bien traitée dans l'ensemble.
Question plutôt bien traitée, signalons quelques copies effrayantes avec des produits d'intégrales et une confusion entre $\sin^n(t)$ et $\sin(nt)$.
Question bien traitée dans l'ensemble.
Question plutôt bien traitée, rappelons simplement aux candidats qu'il est préférable pour ce genre de questions de faire « une vraie récurrence ».
Un certain nombre ne prouve pas la première relation mais utilise correctement la question précédente pour démontrer la deuxième relation.
a) De nombreux candidats oublient avant de diviser l'inégalité par I_n, de préciser $I_n>0$.
b) Les deux premières inégalités sont bien traitées par contre rarement la troisième.
c) Quelques soucis sur la notion d'équivalents (encore quelques équivalents à 0 !), le passage à la racine n'est pas souvent justifié.
a) Question rarement traitée correctement, de nombreux candidats obtiennent des inégalités étranges à partir d'équivalents !
b) De nombreux étudiants évoquent un théorème des gendarmes sur les équivalents !
c) Oubli très répandu de l'argument de positivité dans la règle des équivalents, la dernière série est rarement bien traitée et le critère des séries alternées souvent bien vague. Les équivalents sont très souvent fantaisistes, les étudiants se débarrassent des constantes ! Au final seul 5% des candidats traitent correctement les 4 séries.

Partie III :
a) Encore une question très facile et mal traitée. Des confusions dramatiques pour certains entre les intégrales dépendant de leurs bornes et les intégrales dépendant d'un paramètre.
b) Pour de nombreux candidats F'(x)=f(x)-f(0) ! Pour d'autres F est décroissante !
c) De très nombreux candidats pensent qu'une primitive d'une fonction paire est automatiquement impaire, ce qui est faux !
d) C'est une question globalement mieux réussie par ceux qui la traitent, ce qui peut sembler parfois curieux lorsque l'on compare aux erreurs précédentes.
e) Quelques candidats ignorent les hypothèses précises de ce théorème : on trouve ainsi de la continuité, le fait d'être borné au lieu de majoré, le théorème de comparaison concernant 2 fonctions…
f) Rares sont les candidats qui exhibent un majorant pour la fonction F !

a) Le théorème d'intégration d'un développement limité n'est jamais cité, quelques-uns oublient de préciser que F(0)=0.
b) Peu d'étudiants utilisent correctement le DL pour cette question et alors pour la majorité d'entre eux x^5 est de signe constant au voisinage de 0 !!!
c) Mêmes remarques qu'en I)1)b).
a) Certains candidats se compliquent la vie en passant par des intégrales impropres.
b) Moins de 1% des candidats évoquent la continuité de F en 0 lors du passage à la limite.
c) Très peu de candidats ont compris cette question ou ne savent pas lire l'énoncé !
b) Contrairement à la question III)2)b), de nombreuses équations de tangentes ici ne ressemblent même pas à l'équation d'une droite !
c) Peu de graphes tiennent compte de tous les points étudiés et très peu sont soignés.
a) La rédaction de cette question est rarement parfaite : oubli de l'intervalle de résolution avec vérification des différentes hypothèses, quelques soucis pour primitiver et parfois dans la conclusion de la méthode de variations de la constante, certains n'ont pas vu le lien avec F ou évoquent un pseudo erreur d'énoncé pour faire apparaître F.
b) i) Parfois les candidats trouvent une double symétrie axiale (1 pour x et pour y !!)
iii) Question fort mal traitée ! Quelques branches infinies très étranges, moins de 5 candidats sur plus de 3000 ont déterminé la tangente au point asymptote.
iv) Quelques courbes étranges, et peu de courbes sont soignées.
c) i) La dernière inégalité est très rarement traitée correctement.
ii) Très peu de candidats distinguent (0,0) des autres valeurs, et la continuité à l'origine est rarement bien faite : utilisation des applications partielles, ignorance de la signification de continuité en (0,0) on ne tient pas compte de la valeur du prolongement…
iii) Le calcul des dérivées partielles entrepris par la majorité des candidats est dans 7 cas sur 10 faux (problème de composition !).
iv) Cette question lorsqu'elle est traitée, est toujours très mal traitée !

Partie IV :
a) Mêmes remarques qu'en I)2)d).
b) De nombreux étudiants n'utilisent pas ce qu'ils ont déjà fait, ils recommencent tout ! La valeur de h(-1) est souvent fausse et très peu ont remarqué que h était impaire.
c) Dans seulement 10% des copies, le théorème de continuité radiale est correctement énoncé, les candidats inventent souvent le théorème adéquat avec continuité sur [-1,1].
d) De nombreux candidats ont réellement du mal à majorer des valeurs absolues, même si la notion de convergence normale est globalement connue avec le théorème de continuité, l'application à h est loin d'être parfaite !
a) Utilisation de α au lieu de β, l'intervalle est souvent faux, recours abusif à la notation binomiale pour des réels sans aucune justification : comme s'il s'agissait bêtement de la formule du binôme, Les bornes des sommes ou le dernier terme du produit sont souvent faux.
b) Confusion entre x^n et x^{4n}.
c) Très peu de candidats ont étudié le cas des bornes.
d) Question bien traitée par les candidats qui l'abordent.
a) Pratiquement aucun candidat ne vérifie les hypothèses du critère des séries alternées même si la majoration est connue par les candidats qui abordent la question.
b) Question bien traitée par les candidats qui l'abordent.
c) Très peu de candidats ont correctement exhibé un entier correspondant à ce qui était demandé.

CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS

Voici quelques domaines où il faut accentuer ses révisions :

Les inégalités.

La détermination des rayons de convergence d'une série entière : rappelons ici qu'il n'existe pas de théorème de d'Alembert pour les séries entières mais uniquement pour les séries numériques : qu'il faut donc forcément mener une discussion pour déterminer le rayon de convergence.

Le tracé de graphes précis et soignés où figurent des tangentes…

La justification précise de la convergence d'une intégrale impropre : de nombreux candidats étudient systématiquement les 2 bornes de l'intégrale sans commencer par déterminer l'intervalle de continuité de la fonction et son signe.

La notion de points d'inflexion : moins de 0.5% des candidats sait de manière précise ce qu'est un point d'inflexion.

L'intégration sur un segment et la notion de primitive

Il faut se laisser quelques minutes de relecture et faire preuve d'esprit critique et faire attention à la cohérence des résultats.