Devoir de Mathématiques numéro 5

Correction

Exercice 1 (CAPES 2021)

1) La variable aléatoire qui modélise le nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'ensemble de la collection, donc n animaux différents, est

$$\boxed{T_n}$$

2) Dès le premier achat, le collectionneur a exactement 1 animal : $T_1(\Omega) = \{1\}$. Donc

$$\boxed{T_1 = 1}$$

3) **a)** Notons X_i l'animal, représenté par un numéro entre 1 et n, obtenu lors du i-ème achat.

L'évènement A considéré est $A = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcap_{i=1}^{q} (X_i = k)$: le collectionneur obtient toujours l'animal k, identique au premier animal tiré, pour tous les achats entre 1 et q. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \bigcap_{i=1}^{q} (X_i = k)\right) & \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{q} (X_i = k)\right) & \text{Union disjointe} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{q} \mathbb{P}(X_i = k) & \text{Tirages indépendants...} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^q} = \frac{1}{n^{q-1}} & \text{... et équiprobables}
\end{aligned}$$

Toujours nommer les objets : nommer l'évènement étudié (A), le résultat du tirage (X_i).

Ainsi, la probabilité qu'un collectionneur obtienne toujours le même animal au cours de ses $q \geqslant 2$ premiers achats est

$$\boxed{\frac{1}{n^{q-1}}}$$

b) Pour avoir deux cartes, il faut au moins 2 achats, donc $\mathbb{P}(T_2 > 1) = 1$.

Soit $q \geqslant 2$. L'évènement $(T_2 > q)$ est « le collectionneur a obtenu toujours la même carte lors de ses q premiers achats » : $(T_2 > q) = A$, et d'après 3a, $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{n^{q-1}}$. Ainsi,

$$\boxed{\forall q \geqslant 1, \quad \mathbb{P}(T_2 > q) = \frac{1}{n^{q-1}}}$$

c) *Comme la question de cours sur la loi de $\min(X, Y)$.*

$T_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$. Soit $q \geqslant 2$.

$$(T_2 \geqslant q) = (T_2 = q) \cup (T_2 > q)$$

Comme T_2 est à valeurs entières, $(T_2 > q-1) = (T_2 \geqslant q)$, et l'union étant disjointe,

$$\mathbb{P}(T_2 > q-1) = \mathbb{P}(T_2 = q) + \mathbb{P}(T_2 > q)$$

D'après b,

$$\boxed{\mathbb{P}(T_2 = q) = \frac{1}{n^{q-2}} - \frac{1}{n^{q-1}} = \frac{n-1}{n^{q-1}}}$$

d) Nous cherchons le nombre minimal q d'achats tels que $\mathbb{P}(T_2 \leqslant q) \geqslant 0,99$. Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_2 \leqslant q) &= \sum_{k=2}^{q} \mathbb{P}(T_2 = k) \\
&= \sum_{k=2}^{q} \frac{1}{n^{k-2}} - \frac{1}{n^{k-1}} \\
&= 1 - \frac{1}{n^{q-1}} && \text{Télescopique}
\end{aligned}$$

C'est plus rapide, mais peut-être moins naturel, de remarquer que $(T_2 \leqslant q) = \overline{(T_2 > q)}$.
Ainsi on cherche q tel que

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{100^{q-1}} \geqslant 1 - \frac{1}{100} \\
\Longrightarrow\ &100^{q-1} \geqslant 100 \\
\Longrightarrow\ &q-1 \geqslant 1
\end{aligned}$$

Donc

Il faut au minimum 2 achats pour que le collectionneur ait une probabilité d'obtenir deux animaux différents supérieure ou égale à 0,99.

e) Pour $k=1$, le collectionneur a $k-1=0$ animaux au départ, et $k=1$ animal pour la première fois après T_1 achat, donc $Z_1 = T_1$.
Pour $k \in [\![2,n]\!]$, le collectionneur a $k-1$ animaux après T_{k-1} achats, et k animaux après T_k achats. Il lui a donc fallu $Z_k = T_k - T_{k-1}$ achats entre l'achat T_{k-1} et l'achat T_k.

f) *On reconnaît une somme télescopique.* En posant $T_0 = 0$, il vient

$$\forall k \in [\![1,n]\!]\,, \qquad Z_k = T_k - T_{k-1}$$

Et, la somme suivante étant télescopique,

$$\sum_{i=1}^{k} Z_i = \sum_{i=1}^{k} T_i - T_{i-1} = T_k - T_0 = T_k$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \quad T_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i}$$

g) Z_k est le temps du premier succès dans une suite d'expérience de Bernoulli mutuellement indépendantes de même paramètre $p = \dfrac{n-k+1}{n}$. Donc

$$\boxed{Z_k \sim \mathscr{G}\left(\frac{n-k+1}{n}\right)}$$

Détaillons : notons $j = T_{k-1}$, et A_{k-1} l'ensemble des $k-1$ animaux déjà obtenus. Alors

$$(Z_k = i) = (X_{j+1} \in A_{k-1}) \cap \cdots \cap (X_{j+i-1} \in A_{k-1}) \cap (X_{j+i} \notin A_{k-1})$$

Les achats X_m étant mutuellement indépendants,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_k = i) &= \mathbb{P}(X_{j+1} \in A_{k-1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_{j+i-1} \in A_{k-1}) \times \mathbb{P}(X_{j+i} \notin A_{k-1}) \\ &= \left(\frac{k-1}{n}\right)^{i-1} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\end{aligned}$$

D'après le cours,

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_k) = \frac{1}{p} = \frac{n}{n-k+1} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z_k) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{n(k-1)}{(n-k+1)^2}}$$

h) D'après f), $T_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, et, d'après g), $\mathbb{E}(Z_i) = \dfrac{n}{n-i+1}$. Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Z_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} && \text{Avec le changement d'indices } k = n-i+1\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = nH_n}$$

i) Comme $H_n \sim \ln n$ (résultat classique [1]),

$$\boxed{\mathbb{E}(T_n) \sim n \ln n}$$

4) **a)** Indépendance : Les achats (X_i) sont mutuellement indépendants, donc, comme les (Z_k) sont construites à partir d'ensembles disjoints de (X_i), par le lemme des coalitions,

$$\boxed{\text{Les } (Z_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}, \text{ sont mutuellement indépendantes}}$$

Variance : Utilisons plutôt $\mathbb{V}(Z_i) = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p}$. Comme $T_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(T_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Z_i) && \text{par indépendance mutuelle} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{(n-i+1)^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} && \text{d'après g)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} && \text{Avec le changement d'indices } k = n-i+1 \\ &= n^2 B_n - nH_n\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{V}(T_n) = n^2 B_n - nH_n}$$

1. Comparaison série/intégrale, question de cours. L'énoncé d'origine le redémontrait, ici je le donnais.

b) Par positivité de $\dfrac{1}{k^2}$ pour $k \geqslant n \geqslant 1$, $B_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} B_n = \dfrac{\pi^2}{6}$.
De plus, $H_n \geqslant 0$ donc $-nH_n \leqslant 0$. Ainsi, d'après a),

$$\boxed{\mathbb{V}(T_n) = n^2 B_n - nH_n \leqslant \frac{n^2\pi^2}{6}}$$

5) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}\left(T_n\right)| \geqslant \lambda n \ln n\right) &\leqslant \frac{\mathbb{V}(T_n)}{(\lambda n \ln n)^2}\\ &\leqslant \frac{n^2\,\pi^2}{6\lambda^2\, n^2\,(\ln n)^2} = \frac{\pi^2}{6\,\lambda^2\,(\ln n)^2}.\end{aligned}$$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\text{Pour tout nombre réel } \lambda > 0,\ \mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}\left(T_n\right)| \geqslant \lambda n \ln n\right) \leqslant \dfrac{\pi^2}{6\lambda^2(\ln n)^2}.}$

6) Étudions les évènements :

$$\begin{aligned}(T_n \geqslant n\,H_n + n\,\ln n) &= (T_n \geqslant \mathbb{E}(T_n) + n\,\ln n) &&\text{D'après 3i}\\ &= (T_n - \mathbb{E}(T_n) \geqslant n\,\ln n)\\ &\subset (|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geqslant n\,\ln n)\end{aligned}$$

D'où, d'après 5 avec $\lambda = 1$,

$$\mathbb{P}(T_n \geqslant n\,H_n + n\,\ln n) \leqslant \mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}\left(T_n\right)| \geqslant n \ln n\right) \leqslant \frac{\pi^2}{6(\ln n)^2}$$

Pour avoir $\mathbb{P}\left(T_n \geqslant nH_n + n\ln n\right) \leqslant 0,01$, il suffit d'avoir $\dfrac{\pi^2}{6\,(\ln n)^2} \leqslant 0,01$. Or

$$\frac{\pi^2}{6(\ln n)^2} \leqslant 0,01 \iff \frac{\pi^2}{0,01\,6} \leqslant (\ln n)^2 \iff \frac{\pi}{0,1\,\sqrt{6}} \leqslant \ln n \iff n \geqslant e^{\frac{10\,\pi}{\sqrt{6}}} \simeq 371572.1400$$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\text{Pour } n_0 = 371573, \text{ on a } \forall n \geqslant n_0,\ \mathbb{P}\left(T_n \geqslant nH_n + n\ln n\right) \leqslant 0,01}$

Exercice 2 (Mines-Ponts MP 2020)

1) Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant P(S_n = 0_d) \leqslant 1$ et $R\left(\sum x^n\right) = 1$, par théorème de majoration, $R_F \geqslant 1$.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant P(R = n) \leqslant 1$, donc $R_G \geqslant 1$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Les séries entières définissant } F \text{ et } G \text{ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à } 1}$$

Par théorème de dérivation des séries entières, F et G sont de classes $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R_F, R_F[$ et $]-R_G, R_G[$ respectivement. Comme $R_F \geqslant 1$ et $R_G \geqslant 1$,

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont définies et de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-1,1[}$$

Le cours donne des résultats pour la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Or, ici, $R(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Il faut donc, a priori, refaire la preuve.
<u>Étude de G</u> :
Convergence normale de la série : Posons $u_n(x) = P(R = n)x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$.

$$\|u_n\|_\infty = P(R = n)$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(R = n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}(R = n)\right) = P(R \neq +\infty) \in [0,1]$: la série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.
Donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.
<u>Continuité</u> :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $[-1,1]$ car polynomiale ;
- $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1,1]$;

Donc, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions,

$$\boxed{G \text{ est définie et continue sur } [-1,1]}$$

De plus, d'après le calcul précédent,

$$\boxed{G(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(R=n) = P(R \neq +\infty)}$$

2) Calcul de $P((S_n = 0_d) \cap (R = k))$: Si $R = k$, alors $S_k = 0$ *(et $S_i \neq 0$ pour $i < k$, mais peu importe)*.

Or $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = S_k + \sum_{i=k+1}^{n} X_i$. Ainsi,

$$(S_n = 0_d) \cap (R = k) = \Big(\sum_{i=k+1}^{n} X_i = 0\Big) \cap (R = k)$$

L'évènement $\Big(\sum_{i=k+1}^{n} X_i = 0\Big)$ est une fonction de $(X_{k+1}, \ldots, X_n)$, alors que $(R = k)$ est une fonction de $(X_1, \ldots, X_k)$.

Par indépendance des $(X_i)_i$ et lemme des coalitions, $(\sum_{i=k+1}^{n} X_i = 0)$ et $(R = k)$ sont indépendants :

$$P((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = P\Big(\sum_{i=k+1}^{n} X_i = 0\Big)P(R = k)$$

Or les X_i sont indépendantes et suivent toutes la même loi, donc $Y = (X_{k+1}, \ldots, X_n)$ suit la même loi que $Z = (X_1, \ldots, X_{n-k})$. Puis, en appliquant la fonction $f : (x_1, \ldots, x_{n-k}) \mapsto \sum_{i=1}^{n-k} x_i$, $f(Y) = \sum_{i=k+1}^{n} X_i$ suit la même loi que $f(Z) = \sum_{i=1}^{n-k} X_i$. En particulier,

$$P\Big(\sum_{i=k+1}^{n} X_i = 0\Big) = P\Big(\sum_{i=1}^{n-k} X_i = 0\Big)$$

C'est un résultat que l'on retrouve souvent : regarder n lancers de dés à partir du 1er ou du $k+1$-ième, c'est pareil – i.e. la même loi.

Or $\sum_{i=1}^{n-k} X_i = S_{n-k}$:

$$\boxed{P((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = P(R = k)P(S_{n-k} = 0_d)}$$

Calcul de $P(S_n = 0_d)$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la formule des probabilités totales, avec le système complet d'évènements $(R = k)_{k \in R(\Omega)}$,

$$\begin{aligned}
P(S_n = 0_d) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P((S_n = 0_d) \cap (R = k)) + P((S_n = 0_d) \cap (R = +\infty)) && \text{Or } R \leqslant n \text{ si } S_n = 0_d \\
&= \sum_{k=1}^{n} P((S_n = 0_d) \cap (R = k)) \\
&= P(R = k)P(S_{n-k} = 0_d) && \text{D'après ci-dessus}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{n} P(R=k)P(S_{n-k} = 0_d)}$$

3) Soit $x \in]-1,1[$. *Savoir reconnaître un produit de Cauchy $k, n-k$. Surtout lorsqu'on vous donne le résultat !*

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0_d)x^n \\
&= P(S_0 = 0_d) + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} P(R=k)P(S_{n-k} = 0_d)x^n && \text{D'après 2} \\
&= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} P(R=k)P(S_{n-k} = 0_d)x^n && \text{Car } S_0 = 0 \text{ et } (R=0) = \emptyset \\
&= 1 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0_d)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(R=n)x^n\right) && \text{Produit de Cauchy} \\
&= 1 + F(x)G(x)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[\,,\ F(x) = 1 + F(x)G(x)}$$

Limite de $F(x)$ lorsque $x \to 1^-$: *C'est de l'analyse. De première année. Rien d'exotique.*
D'après ci-dessus,

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad F(x)(1-G(x)) = 1$$

Donc, pour $x \in]-1,1[$, nécessairement $1 - G(x) \neq 0$, et

$$F(x) = \frac{1}{1-G(x)}$$

D'après le résultat de la question 1, $\lim\limits_{x\to 1} G(x) = G(1) = P(R \neq +\infty)$.

- Si $P(R \neq +\infty) \neq 1$, en passant à la limite dans l'égalité précédente, il vient

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \frac{1}{1-G(1)} = \frac{1}{P(R=+\infty)}$$

- Supposons $P(R \neq +\infty) = 1$. Pour $x \in [0,1[$, comme les probabilités sont positives,

$$G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(R=n)x^n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} P(R=n) = P(R \neq +\infty) = 1$$

  Donc $1 - G(x) \geqslant 0$, et en passant à la limite avec $\lim\limits_{x\to 1} 1 - G(x) = 0$,

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = +\infty$$

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{P(R=+\infty)} & \text{si } P(R \neq +\infty) \neq 1 \\ +\infty & \text{si } P(R \neq +\infty) = 1 \end{cases}}$$

4) La série $\sum c_k$ à termes *positifs* diverge, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k = +\infty$$

Soit $A > 0$ quelconque, et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{N} c_k \geqslant A + 1$$

La fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k x^k$ est continue car polynomiale, et $\varphi(1) \geqslant A + 1$.
Par continuité, il existe donc $\alpha > 0$ (et $\alpha < 1$) tel que

$$\forall x \in]1-\alpha, 1[, \qquad \varphi(x) \geqslant A$$

Soit un tel α. La série entière $\sum c_k x^k$ converge sur $[0,1]$, et par positivité de x^k et c_k,

$$\forall x \in]1-\alpha, 1[, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \geqslant \sum_{k=0}^{N} c_k x^k = \varphi(x) \geqslant A$$

En conclusion,

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in]1-\alpha, 1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \geqslant A$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{x \to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = +\infty}$$

5) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons la série $\sum P(S_n = 0_d)$ divergente. Alors $R_F \leqslant 1$. Or $R_1 \geqslant 1$ d'après la question 1. Donc $R_F = 1$. *Bien vérifier toutes les hypothèses de 4 avant d'appliquer 4.*
Avec $c_k = P(S_k = 0_d)$, d'après la question 4 ci-dessus, $\lim_{x \to 1^-} F(x) = +\infty$.
Or, d'après la question 3, cela entraîne $P(R \neq +\infty) = 1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $P(R \neq +\infty) = 1$. Alors, d'après 3, $\lim_{x \to 1^-} F(x) = +\infty$.

Supposons que $\sum P(S_n = 0_d)$ converge. En notant $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0_d)$, par positivité du terme général,

$$\forall x \in [0,1], \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0_d) x^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0_d) = \ell$$

Donc F est bornée sur $[0,1]$, ce qui est contradictoire avec $\lim_{1^-} F = +\infty$.
Ainsi, $\sum P(S_n = 0_d)$ est divergente.

Conclusion :

$$\boxed{\text{La série } \sum P(S_n = 0_d) \text{ est divergente si et seulement si } P(R \neq +\infty) = 1}$$

6) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a

$$(S_i \notin \{S_k,\ 0 \leqslant k \leqslant i-1\}) = (S_i - S_0 \neq 0; S_i - S_1 \neq 0; \dots S_i - S_{i-1} \neq 0)$$

Or, pour tout $k \in [\![0, i-1]\!]$, comme à la question 2, $(S_i - S_0, S_i - S_1, \dots, S_i - S_{i-1})$ a la même loi que $(S_i, \dots, S_1)$. Donc

$$\begin{aligned}
P(Y_i = 1) &= P\left(S_i \notin \{S_k,\ 0 \leqslant k \leqslant i-1\}\right) \\
&= P(S_i - S_0 \neq 0; S_i - S_1 \neq 0; \dots S_i - S_{i-1} \neq 0) \\
&= P(S_i \neq 0, \dots, S_1 \neq 0) && \text{Or } (S_i \neq 0, \dots, S_1 \neq 0) = (R > i) \\
&= P(R > i)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad P(Y_i = 1) = P(R > i)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $N_n = N_{n-1}$ si $S_n \in \{S_k, 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$ et $N_n = N_{n-1} + 1$ si $S_n \notin \{S_k, 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$. C'est-à-dire $N_n = N_{n-1} + Y_n$. D'où

$$\sum_{i=0}^{n} Y_i = 1 + \sum_{i=1}^{n} N_i - N_{i-1} = N_n$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E(N_n) = \sum_{i=0}^{n} E(Y_i) = \sum_{i=0}^{n} P(Y_i = 1) = \sum_{i=0}^{n} P(R > i)$$

Ainsi, comme $P(R > 0) = 1$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{E}(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} P(R > i)}$$

7) On remarque que $((R > i))_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion. Ainsi par continuité décroissante, on a :

$$P(R > i) \xrightarrow[i \to +\infty]{} P\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} (R > j)\right) = P(R = +\infty)$$

Or d'après la question précédente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{E(N_n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} P(R > i)$$

À l'aide du théorème de Cesàro, on peut conclure que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{E}(N_n)}{n} = \lim_{n \to +\infty} P(R > n) = P(R = +\infty)}$$