Devoir de Mathématiques numéro 4

Correction

Exercice 1 (E3A PC 2023)

$< u|u >= \|u\|^2$, ce qui est plus court à écrire.

1) a) Linéarité : Soit $(x,y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi_u(\lambda x + y) &= 2\frac{\langle \lambda x + y|u\rangle}{\|u\|^2}u - (\lambda x + y) \\
&= 2\frac{\lambda\langle x|u\rangle + \langle y|u\rangle}{\|u\|^2}u - \lambda x - y \qquad \text{par linéarité du produit scalaire} \\
&= \lambda\varphi_u(x) + \varphi_u(y)
\end{aligned}$$

Donc φ_u est linéaire.
$\underline{\varphi_u : E \to E}$: Pour tout $x \in E$, $\varphi_u(x) \in E$ comme combinaison linéaire d'éléments de E.
Conclusion :

$$\boxed{\varphi_u \text{ est un endomorphisme de } E}$$

b) Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
\varphi_u \circ \varphi_u(x) &= \varphi_u\Big(2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u - x\Big) \\
&= 2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}\ \varphi_u(u) - \varphi_u(x) \qquad \text{par linéarité de } \varphi_u \\
&= 2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}\Big(2\frac{\|u\|^2}{\|u\|^2}u - u\Big) - \Big(2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u - x\Big) \\
&= 2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u - 2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u + x \\
&= x
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\varphi_u^2 = \mathrm{id}_E}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\varphi_u \text{ est un automorphisme de } E \text{ et } \varphi_u^{-1} = \varphi_u}$$

c)

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_u(x)|\varphi_u(x)\rangle &= \Big\langle 2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u - x\Big| 2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u - x\Big\rangle \\
&= \|2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u\|^2 - 2\Big\langle 2\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}u\Big|x\Big\rangle + \|x\|^2 \qquad \textit{Lemme, identité remarquable} \\
&= 4\frac{|\langle x|u\rangle|^2}{\|u\|^4}\|u\|^2 - 4\frac{\langle x|u\rangle}{\|u\|^2}\langle u|x\rangle + \|x\|^2 \\
&= \|x\|^2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\langle\varphi_u(x)|\varphi_u(x)\rangle = \|x\|^2 = \langle x|x\rangle}$$

d) Ainsi, φ_u est un isométrie, donc, d'après le cours, conserve aussi le produit scalaire.
Il est possible de refaire la démonstration : Soit $(x,y)\in E^2$. L'égalité précédente en $x+y$ s'écrit :

$$\|\varphi_u(x+y)\|^2 = \|\varphi_u(x)+\varphi_u(y)\|^2 = \|x+y\|^2$$

En appliquant le lemme, il vient

$$\|\varphi_u(x)\|^2 + 2\langle\varphi_u(x)|\varphi_u(y)\rangle + \|\varphi_u(y)\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2$$

Comme $\|\varphi_u(x)\|^2 = \|x\|^2$ et $\|\varphi_u(y)\|^2 = \|y\|^2$,

$$\langle\varphi_u(x)|\varphi_u(y)\rangle = \langle x|y\rangle$$

e) Soit $x = \lambda u \in D_u$. *On pouvait aussi se contenter de regarder $\varphi_u(u)$ directement, car u est une base de D_u.*

$$\begin{aligned}\varphi_u(x) &= \lambda\varphi_u(u)\\ &= \lambda(2\frac{\langle u|u\rangle}{\langle u|u\rangle}u - u)\\ &= x\end{aligned}$$

Ainsi, $(\varphi_u)_{|D_u} = \mathrm{id}_{D_u}$, et

$$\boxed{\varphi_u(D_u) = D_u}$$

Comme φ_u est isométrie, si F est stable par φ_u alors $F^\perp$ aussi :

$$\boxed{\varphi_u(H_u) \subset H_u}$$

f) Si $x \in H_u = D_u^\perp$, $\langle x|u\rangle = 0$ donc

$$\varphi_u(x) = 2\frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle}u - x = -x$$

Ainsi, $E = D_u \oplus_\perp H_u$ et φ_u agit comme l'identité sur D_u et moins l'identité sur H_u :

$$\boxed{\varphi_u \text{ est la symétrie orthogonale par rapport à } D_u}$$

On peut détailler : $E_1 = D_u$, $E_{-1} = H_u$, etc. On peut aussi prendre un raccourci : avec $e_1 = u/\|u\|$ base orthonormée de D_u,

$$p_{D_u}(x) = \langle x|e_1\rangle e_1 = \frac{\langle x|u\rangle}{\langle u|u\rangle}u$$

est le projecteur orthogonal sur D_u. Donc $\varphi_u = 2p_{D_u} - \mathrm{id}$ est la symétrie associée à $\mathrm{id} - p_{D_u}$.

2) **a)** H est un plan (de base $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$), donc

$$\dim H^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim H = 1$$

Ainsi, $H^\perp$ est une droite, et comme $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal à tout vecteur de H :

$$\forall X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in H, \qquad \langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle = x+y+z = 0$$

$$\boxed{\dim H^{\perp} = 1 \text{ et } \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ est une base orthonormée de } H^{\perp}}$$

b) Comme $(e_1) = (\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$ est une base orthonormée de $H^{\perp}$, l'expression de la projection orthogonale $p_{H^{\perp}}$ sur $H^{\perp}$ est :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \qquad p_{H^{\perp}}(x) = \langle x|e_1\rangle e_1$$

Ainsi,

$$p_{H^{\perp}}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \frac{1}{3}\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

De même,

$$p_{H^{\perp}}(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = p_{H^{\perp}}(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

En conclusion, la matrice de $p_{H^{\perp}}$ dans la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est, en sortant le 1/3,

$$\boxed{M = \frac{1}{3}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p_{H^{\perp}}(\varepsilon_1) & p_{H^{\perp}}(\varepsilon_2) & p_{H^{\perp}}(\varepsilon_3) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array}}$$

Puis la projection orthogonale sur H est

$$\boxed{I_3 - M = I_3 - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}}$$

c) Comme $\varphi_v = 2p_{H^{\perp}} - \mathrm{id}$, sa matrice est

$$\boxed{2M - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}}$$

3) **a)** Soit $x = y + z \in E = \Delta \oplus_{\perp} \Delta^{\perp}$.

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(y) + \psi(z) \\ &= y - z && \text{Car } y \in \Delta \text{ et } z \in \Delta^{\perp} \\ \Longrightarrow \psi^2(x) &= \psi(y) - \psi(z) = y + z = x \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\psi \circ \psi = \mathrm{id}_E}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|\psi(x)\|^2 &= \|y - z\|^2 \\ &= \|y\|^2 + \|-z\|^2 && \text{Pythagore, car } y \perp -z \\ &= \|y\|^2 + \|z\|^2 \\ &= \|x\|^2 && \text{Pythagore} \end{aligned}$$

Donc ψ est un isométrie, et, en particulier

$$\boxed{\psi \text{ conserve le produit scalaire}}$$

b) ψ est une symétrie et une isométrie, c'est donc une symétrie orthogonale.
Une projection orthogonale associée est la projection sur $E_1 = \Delta$. Soit u une base orthonormée de Δ, alors

$$\forall x \in E, \qquad p_\Delta(x) = \langle x|u\rangle u$$

et $\psi = 2p_\Delta - \mathrm{id} = \varphi_u$ (car $\langle u|u\rangle = 1$).
Ainsi,

$$\boxed{\text{Il existe au moins un vecteur } u \text{ de } E \text{ tel que } \psi = \varphi_u}$$

Exercice 2 (E3A PSI 2023)

1) **a)** M est de type 0 si $M^\top = M^0 = I_p$, donc l'ensemble cherché est

$$\boxed{\{I_p\}}$$

b) M est de type 1 si $M^\top = M$, donc l'ensemble cherché est l'ensemble des matrices symétriques :

$$\boxed{\mathscr{S}_p(\mathbb{R})}$$

c) M est de type -1 si M est inversible et $M^\top = M^{-1}$, donc l'ensemble cherché est

$$\boxed{\mathscr{O}_n(\mathbb{R})}$$

Exemple : $-I_4$.

2) **a)** Soit $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. *Calcul classique, à connaître.*

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) & \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} && \text{formules de trigonométrie}
\end{aligned}$$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_m : \quad (A(\theta))^m = A(m\theta)$$

est vraie pour tout $m \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $A(0) = I_3$ donc $\mathcal{H}_0$.
- $\underline{\mathcal{H}_m \Longrightarrow \mathcal{H}_{m+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_m$ vraie.

$$\begin{aligned}
(A(\theta))^{m+1} &= A(m\theta)A(\theta) && (\mathcal{H}_m) \\
&= A(m\theta + \theta) && \text{Par un calcul bloc et le calcul précédent.} \\
&= A((m+1)\theta)
\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{m+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall m \geqslant 0 \quad (A(\theta))^m = A(m\theta)}$

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $A(\theta)$ de type n si et seulement si $A(\theta)^\top = (A(\theta))^n$.
Or $A(\theta)^\top = A(-\theta)$, et, comme $n \geqslant 0$, $(A(\theta))^n = A(n\theta)$.
La condition s'écrit donc

$$A(-\theta) = A(n\theta)$$

Au niveau des coefficients, on a donc

$$\cos(-\theta) = \cos(n\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(-\theta) = \sin(n\theta)$$

Ce qui signifie,

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \qquad -\theta + 2k\pi = n\theta$$

Autrement dit,

$$\exists k \in \mathbb{Z}, \qquad \theta = \frac{2k\pi}{n+1}$$

D'où l'ensemble cherché

$$\boxed{\left\{ \frac{2k\pi}{n+1} \ \middle|\ k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

On nous demande les θ. Si on cherche les $A(\theta)$, comme $A(\theta + 2\pi) = A(\theta)$, on peut prendre $k \in [\![0, n+1]\!]$. Mais ce n'est pas la question.

3) a) Comme l'énoncé le rappelle, $(MN)^\top = N^\top M^\top$. Donc,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad (M^k)^\top = (M^\top)^k$$

En particulier,

$$A^{n^2} = (A^n)^n = (A^\top)^n = (A^n)^\top = A^{\top\top} = A$$

Ainsi,

$$\boxed{A^{n^2} = A}$$

b) i) $B^n = A^{n^2+n} = AA^n = A^{n+1} = B$ d'après a. Ainsi,

$$\boxed{B^n = B}$$

ii) Comme $A^n = A^\top$,

$$B = A^{n+1} = A^\top A$$

Ainsi, $B^\top = A^\top A^{\top\top} = A^\top A = B$:

$$\boxed{B \text{ est une matrice symétrique}}$$

iii) D'après le théorème spectral, toutes les valeurs propres de B sont réelles. *On ne précise pas si l'énoncé parle des valeurs propres réelles (a priori) ou complexe. Autant dégainer le théorème spectral : la question est réglée.*
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$, et X un vecteur propre associé : $BX = \lambda X$.

$$\begin{aligned}(BX \mid X) = (\lambda X \mid X) &= \lambda \|X\|^2 \\ &= (A^\top A X)^\top X \\ &= (AX)^\top AX \\ &= \|AX\|^2\end{aligned}$$

Or X est un vecteur propre, donc $X \neq 0$, d'où $\|X\| \neq 0$, et

$$\lambda = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \geqslant 0$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+}$$

iv) Le polynôme $P = X^n - X$ est un polynôme annulateur de B d'après la question i. Donc $\mathrm{Sp}(B)$ est inclus dans l'ensemble $Z(P)$ des racines de P.
Or $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$ d'après iii, et les racines réelles positives de P sont 1 et 0 :

$$\mathrm{Sp}(B) \subset \{0, 1\}$$

D'après le théorème spectral, B est diagonalisable.
Donc, si $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$, $B = 0$, et si $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$, $B = I_p$.
Donc, si $B \neq 0$ et $B \neq I_p$,

$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{0, 1\}}$$

v) D'après les théorème de diagonalisation, comme B est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(B) = \{0, 1\}$, $P = X(X-1)$ est un polynôme (scindé à racines simples) annulateur de B :

$$B^2 = B$$

Donc B est une matrice de projection. Or B est symétrique d'après ii, donc B est une matrice d'un projecteur autoadjoint. D'après le cours,

$$\boxed{B \text{ est une matrice de projection orthogonale}}$$

B projette sur $\mathrm{Im}\ B$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\ B = (\mathrm{Im}\ B)^\perp$.

c) $\boxed{\subset}$ Montrons que $\mathrm{Ker}\ B \subset \mathrm{Ker}\ A$:

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}\ B &\Longrightarrow BX = 0 \\ &\Longrightarrow (BX \mid X) = (0 \mid X) = 0 && \text{Or } B = A^\top A \\ &\Longrightarrow (A^\top AX)^\top X = (AX)^\top AX = 0 \\ &\Longrightarrow \|AX\|^2 = 0 && \textit{Toujours la même idée, celle de la question de cours.} \\ &\Longrightarrow AX = 0 \\ &\Longrightarrow X \in \mathrm{Ker}\ A \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}\ B \subset \mathrm{Ker}\ A$

$\boxed{\supset}$ Montrons que $\mathrm{Ker}\ A \subset \mathrm{Ker}\ B$:

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}\ A &\Longrightarrow AX = 0 \\ &\Longrightarrow BX = A^{n+1}X = A^n 0 = 0 \\ &\Longrightarrow X \in \mathrm{Ker}\ B \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}\ A \subset \mathrm{Ker}\ B$
Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A)}$$

d) *Pavlovien : en dimension finie, théorème du rang.* D'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Im}\ A &= \dim E - \dim \mathrm{Ker}\ A \\ &= \dim E - \dim \mathrm{Ker}\ B && \text{Car Ker } A = \text{Ker } B \text{ d'après la question c précédente.} \\ &= \dim \mathrm{Im}\ B \end{aligned}$$

Comme $B = AA^n$,

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \qquad BX = A(A^n X) \in \mathrm{Im}\ A$$

Donc $\mathrm{Im}\ B \subset \mathrm{Im}\ A$. Par inclusion et égalité des dimensions,

$$\boxed{\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)}$$

e) Comme B est une matrice de projection orthogonale (b.v.), Ker B et Im B sont supplémentaires orthogonaux. Or Ker $B =$ Ker A (c) et Im $B =$ Im A (d). D'où

$$\boxed{\text{Im}(A) \text{ et Ker}\,(A) \text{ sont supplémentaires orthogonaux}}$$

f) Soit $X \in \text{Im } A = \text{Im } B$.

$$\begin{aligned}\|AX\|^2 &= (AX \mid AX) \\ &= (AX)^\top AX \\ &= \left(X \mid A^\top AX\right)\end{aligned}$$

Or $A^\top A = B$, et $X \in \text{Im } B$ entraîne, comme B est un projecteur, $A^\top AX = BX = X$.

$$\|AX\|^2 = (X \mid X) = \|X\|^2$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall X \in \text{Im}(A),\ \|AX\| = \|X\|}$$

g) Si A est inversible, Im $A = \mathbb{R}^p$, et l'égalité précédente montre que A est la matrice d'une isométrie. Ainsi, $A^\top = A^{-1}$.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est de plus inversible, alors } A \text{ est aussi de type } -1}$$

4) Soit $g : \begin{cases} \text{Im } A \to \text{Im } A \\ X \mapsto AX \end{cases}$. D'après 3f, g est une isométrie, donc inversible.
De plus, comme $A^{n+1} = A^\top = A^n$, on a $g^{n+1} = g^n$.
En composant par g^{-n}, il vient $g = \text{id}_{\text{Im } A}$.
Soit $X = Y + Z \in E = \text{Ker } A \oplus_\perp \text{Im } A$ (d'après 3e). Alors

$$AX = AY + AZ = 0 + g(Z) = Z$$

Donc A est la matrice de la projection sur Im A parallèlement à Ker A :

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est à la fois de type } n \text{ et de type } n+1,\ A \text{ est une matrice de projecteur orthogonal}}$$